

Б.А. КОРДЕМСКИЙ



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ

завлекалки

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$X_1 < X < X_2, y_0 = y(x_0)$$

$$y_0 = y(x_0)$$

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$

Б.А.КОРДЕМСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ *завлекалки*

Москва
ОНИКС
Мир и Образование
2005

УДК 51(023)

ББК 22.1

К66

Все права защищены.

*Перепечатка отдельных глав и произведения в целом
без письменного разрешения владельцев прав запрещена.*

Кордемский Б. А.

К66 Математические заглавки. — М.: ООО «Издательство
Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2005. —
512 с.: ил.

ISBN 5-488-00024-0 (ООО «Издательство Оникс»)

ISBN 5-94666-216-3 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

Книга мастера отечественной научно-популярной литературы
Бориса Анастасьевича Кордемского — сборник математических
миниатюр: разнообразных занимательных эссе и сказочек, фантазий
и просто задач.

Все, кто увлекается математикой, — независимо от возраста —
получат возможность потренировать мышление, находчивость и
изобретательность.

УДК 51(023)

ББК 22.1

Научно-популярное издание

Кордемский Борис Анастасьевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАГЛАВКИ

Подписано в печать 25.07.2005. Формат 84×108 1/32. Гарнитура «Таймс».

Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,88. Тираж 5 000 экз. Заказ № 345.

Качество печати соответствует качеству предоставленных диапозитивов.

Общероссийский классификатор продукции

ОК-005-93, том 2; 953005 — учебная литература

ООО «Издательство Оникс».

127422, Москва, ул. Тимирязевская, д. 38/25. Почтовый адрес: 117418, Москва, а/я 26.

Отдел реализации: тел. (095) 310-75-25, 110-02-50.

Internet: www.onyx.ru; e-mail: mail@onyx.ru

ООО «Издательство «Мир и Образование».

Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001. 109193, Москва, ул. 5-я Кожуховская, д. 13, стр. 1.

Тел./факс (095) 120-51-47, 129-09-60, 742-43-54. E-mail: mir-obrazovanie@onyx.ru



Отпечатано с готовых диапозитивов

в ОАО «Рыбинский Дом печати»

152901, г. Рыбинск, ул. Чкалова, 8

ISBN 5-488-00024-0 (ООО «Издательство Оникс»)

ISBN 5-94666-216-3 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

© Луковцева А. К., Фохт О. Б., наследники, 2005

© Оформление переплета. ООО «Издательство Оникс», 2005

Предлагаемые здесь математические миниатюры — занимательные эссе и сказочки, фантазии и просто задачи, легкие и трудные, но всегда общедоступные, тренирующие и шлифующие собственное мышление, — объединены общим названием «завлекалки». Отсюда и цель книги — влюбить вас, читатель, в древнейшую, но вечно цветущую науку — математику, мир которой, не менее, чем мир живой и неживой природы, полон неразгаданных и разгаданных тайн, удивительных и драматических явлений, захватывающих событий и поразительных открытий.

Творческая активность, находчивость, изобретательность и смекалка достигают высшего напряжения и получают отличную тренировку, когда мысль захвачена стремлением решить заинтересовавшую задачу. Найденное решение или даже чтение изложенного остроумного решения всегда вызывает умственное удовлетворение, эстетическое наслаждение.

Легкий юмор фабулы, неожиданность ситуации или развязки, доставляемой решением задачи, стройность геометрических форм, изящество решения, под которым понимается сочетание простоты и оригинальности методов его получения — вот основные элементы эстетики занимательных задач «на смекалку», и таковы возбудители сил притяжения внимания мыслящего человека.

Предлагаемая книга «завлекалок» непосредственно не учит математике, но в часы вашего активного отдыха доставит возможность побродить по тропинкам математики, подняться по ступенькам познания от низшей: опыта, созерцания, накопления наблюдений — к следующей: пониманию теоретических основ созерцаемого материала, выводам из наблюдений. Желаю успеха!

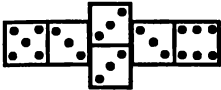
Б.А. Кордемский

К большому сожалению, эта книга оказалась последней, написанной Борисом Анастасьевичем Кордемским (1907–1999 гг.), старейшим и известнейшим автором, мэтром отечественной научно-популярной литературы. За свою долгую и плодотворную жизнь он создал целый ряд разнообразных и увлекательных книг, пробуждающих интерес к математике, способствовавших воспитанию математического мышления, развитию инициативы и сообразительности у многих поколений учащихся.

Все, кто знал Бориса Анастасьевича, сохраняют память об этом высокоэрудированном, трудолюбивом, интеллигентном, отзывчивом и очень доброжелательном человеке.

Оглавление

Глава 1. ВСЯКАЯ ВСЯЧИНКА	13
Однажды... ..	14
И еще много раз... ..	18
Чирик, чирик!	19
А в коробках конфетки	19
Танечка, хочешь пряничка?	19
Он сказал правду.....	20
Шустрик проектирует	21
Лабиринт паука	22
Вас интересует возраст нападающего?	23
Ноги и ножки	23
Школа? — Да. Колба? — Нет	23
Амебы в колбе	24
На арене цирка	24
Через пустыню	25
Привилегированные места для нечетных	25
Когда получение двойки не огорчает	26
Успех и неудача Шустрика	26
В первом году XXI века	27
Три разряда мастерства	27
И снова успех.....	27
Недружные соседи	28
Проектируем парковую дорожку	29
Древнеримская арифметика.....	29
Пять китайок в метро	29
Это там — в Танзании	29
Диалог в квартире № 8	30
Сюзанна! Кто твой брат?	30
Ну и хитрюга же Шустрик!	31
Сам себя удивил	32

Четыре дамы с мужьями	32
Точки в строчке	32
В деление вмещиваются скобки	33
Про японскую девочку Юкко	33
Дольше, но полезнее	33
Практическая арифметика (две шутки)	34
Забавные совпадения	34
	35
Внучки с бабушкой, внуки с дедушкой	35
Угадать тайно выбранное имя	36
Числовой трюк	37
Сто и одна	37
Фокус	38
Еще фокус	38
Угадать число, ничего не спрашивая	39
Секрет системы раскладки	40
Мужественные — налево, женственные — направо .	41
«Да хоть кого смутят вопросы быстрые» (А. Грибое-	41
дов)	41
РЕШЕНИЯ	44
Глава 2. ГАЛЕРЕЯ СКАЗОК, ФАНТАЗИЙ...	65
Как придумывают числа	66
Приключения пятерки	68
И днем и ночью кот ученый все ходит по цепи кругом...	70
Поможем Золушке	71
Продолжение сказки	72
Вот так гости!	72
Три девицы под окном...	73
В котором часу ложился спать Онегин?	73
Коварная принцесса	74
Как победил Иван-царевич Змея Горыныча	75
Как мужик гусей делил	76
Не по своим местам	76

Чашки-ложки для <i>n</i> медведей	77
Топ-топ по паутинке	78
Проделки черта под Рождество	79
Черт о студенте	79
«Город стар, город сед, городу 1140 лет»	81
Сказка о лжецах и правдолюбцах	81
Базарная логика	82
Фантастика в двух эпизодах	83
Кто первый сказал «Э!»	84
Луна грустила напрасно, или Формула футбольного мяча	85
Ну, заяц, погоди!	87
Ох, эти дробь!	87
Пираты и зарытое сокровище	88
Другой вариант сказки о сокровище	89
Мастер, принцесса и солдат	90
Еще задача	92
РЕШЕНИЯ	93

Глава 3. ПРОИСШЕСТВИЯ И ПРИКЛЮЧЕНИЯ НА ТРОПИНКАХ МАТЕМАТИКИ 107

Утром в кафе	108
Вечный скиталец	109
Обычно ропщет несправедный	110
Сколько сыновей и внуков?	111
Доярка и журналисты	111
Шутка	111
В музее часов	112
Экстремальная ситуация	113
Чего нет в фильме «Спрут»?	113
Загадочные указатели расстояний	113
Алгоритм сильнее случая	114
Возрастная лесенка	114
Француженки в джинсах	116
Давно не виделись	116
Спортивные встречи на теннисном корте	116
Случай на конференции	117
Почему у Вали он бывает чаще?	117
Во всем нужна сноровка... ..	118

Быль иль небылица	119
Аналогичный эпизод	120
В лекционном зале больницы	120
Приключение с делением	120
Приключение с золотой цепочкой	121
Бывает же такое... ..	122
«Динамо» — «Ротор» — с каким счетом?	123
История одного занятого конкурса	124
Комбинации созревают на ветвях «дерева»	125
РЕШЕНИЯ	128
Глава 4. ПЛЮС СМЕКАЛКА	143
Наш семейный «брэйн-ринг»	144
Брачные пары за круглым столом	150
Черная или рыжая?	150
Встреча была короткой	151
Здравый смысл плюс смекалка	151
Венок не из ромашек и васильков... ..	152
Подсчитать не пересчитывая	154
Секущая шахматную доску	155
Двойка в головоломке	155
Все цифры в гости к нам... ..	155
С третьей попытки я угадал... ..	158
Как помолодеть городу?	158
Неудавшееся утаивание возраста	159
Эффектный фокус с игральными кубиками	159
Секунды, секунды, секунды... ..	160
Вечное кружение часовых стрелок	161
Я не хочу брать последний пончик	163
Какой колосс колоссальнее?	164
Тайны последней цифры	164
Магические спирали и окружности	164
По цветущему луту	165
Гармония симметрии	166
Три кварты, три кварты... ..	166
«Улик» достаточно	168
Кросс чисел	168
Придумайте геометрическую модель	169
Играем в «очко»... ..	170

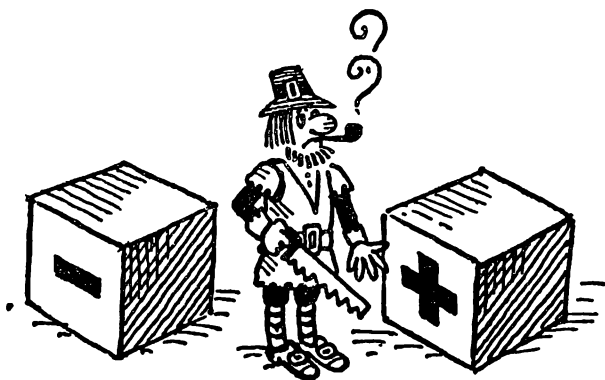
В тесной близости друг к другу...	171
Магия на плитках домино	171
Мозаика из разноцветных квадратов	173
РЕШЕНИЯ	174
Глава 5. ТРИНАДЦАТЬ УВЛЕЧЕННЫХ ЧУДАКОВ	201
1. Чудак-рыбак	202
2. Кулинарка	203
3. Художник-абстракционист	203
4. Коллекционер	204
5. Госпожа ихтиолог	204
6. Программист	205
7. Кладовщик	205
8. Студент-логик	206
9. Закройщик	207
10. Ученик-геометр	208
Вроде бы убедительное	209
11. Капитан и его сын	211
12. Вычислитель-выдумщик	213
Осел (<i>OSEL</i>) на калькуляторе	214
13. Назойливый тринадцатый	217
РЕШЕНИЯ	221
Глава 6. МАЛЕНЬКИЕ ТАЙНЫ ЧИСЕЛ И ФИГУР	229
«... Я скрывать не стану...»	230
Любовь с первого взгляда	233
Кубик из полоски	233
Кубик изготовлен	234
Исполин и пигмей	234
Преобразование треугольника в прямоугольник	235
Все могут... 10 цифр	235
Обойдемся без нуля	237
Две веселые теоремы	240
Головоломка на тему перестройки	240
Разыскиваются потерявшиеся числа	241
Оно растет, оставаясь квадратным	242
Неужели?	242
Семь бед — один ответ	243

Задача разметчика	245
Циркуль в шутке и в деле	246
Курьезные мелочи	247
Три сестры, ковер и письмо	250
Заколдованное число 128	251
Заколдованность исчезает... ..	252
Уникальная тройка INTEGERS	252
Фокус геометрии движения	253
«Неоконченная симфония» числовых зависимос- тей (в десяти частях)	254
Рождение «античного красавца»	256
Развертки моделей многогранников	257
Тайна развертки октаэдра	258
Геометрическая головоломка	259
«Пирамида Пифагора»	259
И у чисел бывают причуды	260
«Безобразную» пирамиду из частей квадрата	262
Интервью астронавта	263
Сказ о превращении стекляшки в алмаз	263
Арифметика — точильный камень способностей ...	265
Кубик не Рубика	265
Как прагматик или как математик?	266
Лист Мебиуса и переплетение колец (тринадцать опытов с бумажной полоской)	266
РЕШЕНИЯ	272
Глава 7. ИЗДАЛЕКА ЧЕРЕЗ ВЕКА	295
Пифагорейский круг	296
Богом данные привилегии числу 7	297
Завещание магараджи	301
Задача-легенда	303
«Дайте мне точку опоры — и я сдвину землю»	303
Сюрпризы диофантовых уравнений	304
Магическая сила единицы	306
Грузинские козы и русские овцы	308
Венецианская шутка с математическим смыслом (XVI в.)	309
Старинная китайская задача	309
Ши-Чао-Тю	310

В старину и так умножали на Руси.....	314
Индийский прием умножения	316
«Волшебная кувшинка»	317
«Крестики-нолики» по Овидию и Шекспиру	317
Как это возможно?	318
Философская загадка Вольтера (в свободном переложении)	319
А в реальной ситуации?	319
Торговали — веселились, подсчитали — прослезились	319
Между прочим.....	320
Сувенир из Индии	320
Стая обезьян (древнеиндийская задача)	322
Число 1729 становится историческим	322
Именные и безымянные числовые треугольники	323
Алфаметика — зашифрованная арифметика.....	327
Геометрическая классика.....	334
Будто витамин!	335
С ощущением волшебства	336
Это было так... (Три ретро-замечания)	342
Поцелуй по расчету	343
Из геометрической фантастики	345
Пара шуточных реплик	347
РЕШЕНИЯ	348
 Глава 8. НЕОБЫЧНОЕ В ОБЫЧНОМ	 369
Причуды календаря	370
Числа-«самородки»	370
Может ли быть такое... ..	372
А еще найдете?	373
Какова совесть у вас?	373
Необычная манера приглашения, и все же... ..	374
Примечательные числа	374
Необычное в привычном	374
Маршрут через 5 точек (головоломка)	375
Скрытая эстетика шестизначного числа	375
Клетки-соседки	376
Капризные соседки (продолжение)	376
«Не верь глазам своим»	377

Картинки равномерных процессов...	378
Волшебная красота магических квадратов	382
Студентки сдают экзамен по прыжкам в высоту	383
Дуэль по-венгерски	384
Диковинки среди простых чисел	385
Занятные стайки простых чисел	387
Совершенные числа	392
Математизированная юриспруденция	394
Проигравшийся Майк жаждет реванша	398
Сценарий — наш, исполнитель — компьютер	398
РЕШЕНИЯ	400
Глава 9. «ДЕЛАЕМ ОТКРЫТИЯ»	415
Гарантированная делимость	417
Путь познания увлекателен, но не усыпан розами	417
С чего начинается «открытие»?	419
Быстрая фабрикация пифтриад	421
А ну-ка, девушки, а ну-ка, мальчики!	422
Замечательные квартеты	423
Три радиуса в одной «упряжке»	424
Только единицы нам и не хватало	425
Неожиданное родство трех разных задач	425
Феномены среди квадратных чисел	428
Курьезы гипотенузы	430
Две фотографии трех средних	431
Гармоническая последовательность и музыкальные интервалы	433
Ряд из чисел, а сам — не число	435
Четыре «открытия» в одной головоломке	436
РЕШЕНИЯ	441
Глава 10. СЕМНАДЦАТЬ МГНОВЕНИЙ НА ЕДИНЕ С МАТЕМАТИКОЙ	451
Задача 1	452
Задача 2	453
Задача 3	453
Задача 4	454
Задача 5	455

Задача 6	456
Задача 7	457
Задача 8	458
Задача 9	458
Задача 10	459
Задача 11	459
Задача 12	460
Задача 13	461
Задача 14	461
Задача 15	462
Задача 16	463
Задача 17. Площадь сада — по числу яблонь	464
Глава 11. ПОЭТИЧЕСКИЙ КАЛЕЙДОСКОП	469





Всякая
Всячина

«А ларчик просто открывался»

И.А. Крылов

Это — в басне дедушки Крылова. Наш «ларец» с немудреными, а подчас и хитроумными «завлекалками в математику» также откроется тому, кто вдумчив, сообразителен, настойчив в поисках разгадки.

ОДНАЖДЫ...

1. В день святой Пасхи Шустрик преподнес *три* крашенных яйца двум мамам и двум дочкам, причем каждая из них получила по одному целому яйцу. Как это вышло?



2. В тот же день Мямлик подарил *четыре* щенков девочке и двум мальчикам, но так, что никто из них не получил щенков больше, чем остальные. Как это удалось ему?

3. Вечером Шустрик и Мямлик затеяли забавную игру ладьями на шахматной доске. У каждого в распоряжении было не менее, чем по 4 ладьи. Оба игрока по очереди ставят ладьи на свободные клетки шахматной доски. Напомню, что ладья контролирует, то есть держит под угрозой «взятия» все клетки вертикали и горизонтали, которым принадлежит клетка, занятая ладьей.

Выигрывает тот, после хода которого все клетки шахматной доски оказываются под контролем поставленных ладей.

Первый ход делает Шустрик. Придумайте такую стратегию игры, что если Мямлик будет ее придерживаться, то наверняка окажется победителем.

4. К ребятам, закончившим игру, подошла Юля — сестренка Шустрика, ученица четвертого класса. В руках она держала два вырезанных из бумаги одинаковых прямоугольника.

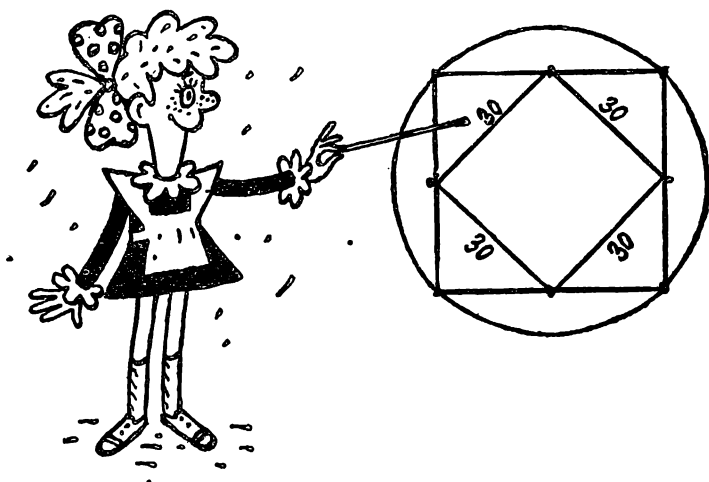
Требовалось, отрезав от каждого заштрихованные полоски, выбросить их, а один из оставшихся кусков разрезать на две части так, чтобы ими можно было полностью и точно покрыть второй кусок.

5. Пока Шустрик и Мямлик преодолевали принесенную Юлей головоломку, сама Юля занялась решением другой



геометрической задачи, предложенной ее учительницей — Натальей Георгиевной Молодых — в виде рисунка, на котором изображены: квадрат, вписанный в квадрат, и описанная окружность.

Требовалось найти длину радиуса окружности, если известно, что сторона малого квадрата равна 30 мм.



6. Произошло загадочное событие: один отец передал своему сыну в его личную библиотеку 600 книг. Другой отец поступил так же и пополнил библиотеку своего сына, передав ему 400 книг. Когда оба сына составили каталоги полученных книг, то оказалось, что их совместный книжный фонд увеличился лишь на ... 600 книг?!

Странно, но — факт! В чем тут дело?

7. Теплым, весенним утром следующего дня ребята выпустили синичек из клетки, разделенной перегородками на 9 отдельных секций. Сколько находилось птичек в каждой секции указано на плане клетки (рис. на с. 17). Две секции, отделенные общей перегородкой, назовем соседними. Со-

седними секциями являются, например, $\overline{9|5}$, или $\left| \begin{smallmatrix} 0 \\ 6 \end{smallmatrix} \right|$

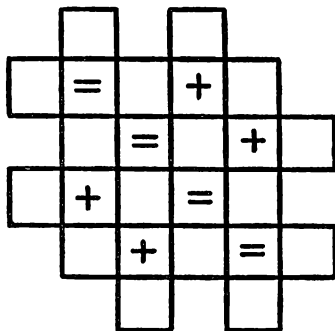
Выпускали синичек на волю не сразу всех, а в несколько приемов: выбирали какую-то пару соседних секций и за один прием из каждой секции выпускали по одинаковому числу птиц. Умело выбирая пары соседних секций, ребята выпустили всех птиц ровно за 5 приемов.

0	3	2
6	7	0
4	9	5

Как они действовали?

8. Мямлику хотелось, чтобы все-таки остались хотя бы одна-две птички в угловых секциях клетки (см. задачу 7). Докажите принципиальную неосуществимость исполнения его желания при соблюдении обусловленного порядка действий по освобождению этих синичек из неволи.

9. Юра Юркин из Краматорска — убежденный противник заключения птичек в клетки (см. задачи 7 и 8) — заявил: «Пусть в клетках будут числа, а не птички». Он предлагает заполнить пустые клетки (рис. внизу) четными числами от 2 до 32 так, чтобы получились верные равенства по строкам и столбцам.



10. Если же все-таки к «синице» прибавить «синицу», то что получится? Правильно:

$$\begin{array}{r} + \text{СИНИЦА} \\ \text{СИНИЦА} \\ \hline \text{ПТИЧКИ} \end{array}$$

Заменяя одинаковые буквы одинаковыми цифрами, разные буквы — разными цифрами, добейтесь верного результата сложения двух «СИНИЦ».

И ЕЩЕ МНОГО РАЗ...

Шустрик и Мямлик развлекали друзей сеансом угадывания числа очков на тайно взятой кем-то из них плитке игры «ДОМИНО». Пусть взявший плитку домино с любым (не нулевым) числом очков на ее половинках, выполнит (про себя!) следующие действия:

1) умножит на 2 число очков любой половинки плитки домино;

2) к получившемуся произведению прибавит названное вами целое число (m);

3) получившуюся сумму умножит на 5;

4) к произведению прибавит число очков второй половины плитки домино. Пусть скажет результат.

Шустрик мысленно отнимает $5m$ и объявляет сколько очков на каждой половинке данной плитки домино.

Пример. Скрытно взятая плитка домино

6	3
---	---

.

Названное Шустриком число $m = 7$. Действия:

1) $6 \cdot 2 = 12$; 2) $12 + 7 = 19$; 3) $19 \cdot 5 = 95$; 4) $95 + 3 = 98$ — результат, сообщенный Шустрику. Он вычисляет:
 $98 - 5 \cdot 7 = 63$

и заявляет: «Взятая плитка домино:

6	3
---	---

»

Дайте объяснение этому фокусу.

ЧИРИК, ЧИРИК!

Выпущенные на волю синички сразу разлетелись. Но из окна комнаты было видно как на площадку возле дома мгновенно приземлились 23 синички. Через некоторое время они все разом вспорхнули и разделились на две стайки. Одна — села на крышу сарая, вторая — на изгородь. Потом 5 птичек перелетели с изгороди на ту же крышу сарая. Одновременно столько же синичек улетело с крыши куда-то. На жердочке изгороди осталось синичек вдвое больше, чем на крыше. Сколько синичек первоначально село на крышу и на изгородь?

А В КОРОБКАХ КОНФЕТКИ

Ящик заполнен одинаковыми коробками, а коробки — конфетками.

Сколько всего коробок в ящике, если конфеток в нем 3737 штук, причем известно, что коробок меньше, чем конфеток в каждой коробке.

ТАНЕЧКА, ХОЧЕШЬ ПРЯНИЧКА?

— Ты получишь сразу 8 вкусных, мягких пряничков и две твои подружки — по столько же, если предварительно уравниаешь количества пряников, находящихся в трех открытых коробочках: 11 штук в первой, 7 — во второй и 6 — в третьей. Перекладывая пряники из одной коробки в другую, надо добавлять столько штук, сколько в ней есть.

Например, если в коробке 6 пряников, то и добавить следует ровно 6, вынутых из какой-то одной коробки. Разрешается сделать только 3 перекладки так, чтобы в каждой из трех коробок оказалось по 8 пряников.

Поделилась пряниками с подругами? Молодец!

Теперь, Танечка, придумай способ — четырьмя прямолинейными разрезами ножа рассечь один свой прямоугольный пряник на 8 равных кусочков, а второй пряник — тоже четырьмя разрезами — на 11 кусочков произвольной величины.

Примечание. В топологии (восхитительная разновидность геометрии) доказывается, что любую плоскую фигуру можно рассечь самое большее на $(n^2 + n + 2) : 2$ частей, где n — число прямолинейных разрезов.

Будет достигнуто наибольшее число частей рассекаемой фигуры, если наметить прямолинейные разрезы так, чтобы каждый из них пересекался со всеми остальными, причем в одной точке не должно пересекаться более двух разрезов.

ОН СКАЗАЛ ПРАВДУ

Гость Светланы Гнатенко сказал ей: «Позавчера мне было 10 лет, а в будущем году мне будет 13 лет». Удивительно, не правда ли? Но гость сказал правду.

В каком месяце и какого числа пришел мальчик в гости к Светлане?

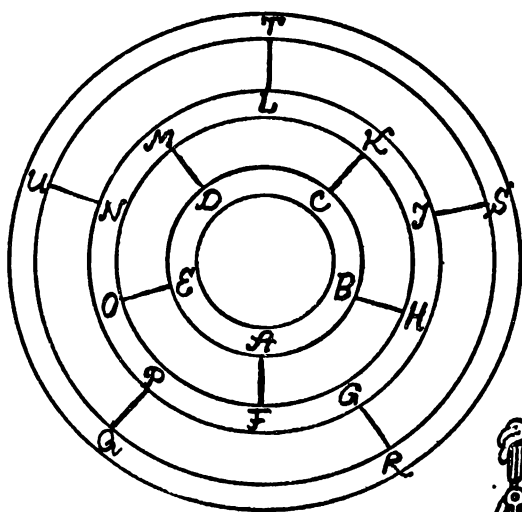


ШУСТРИК ПРОЕКТИРУЕТ

В новом, грандиозном парке отдыха предполагается разместить вдоль трех concentрических дорожек 20 аттракционов, обозначенных на плане Шустрика буквами *A, B, C, ..., U*. Между круговыми дорожками проложено несколько соединительных тропинок.

Парковый архитектор Н. Ситникова, одоббившая проект Шустрика, утверждает, что посетитель, избрав некоторый непрерывный маршрут по проложенным дорожкам и тропинкам, может побывать в каждом из двадцати пунктов по одному разу и закончить обход в том же пункте, с которого начал.

Найдите возможный маршрут обхода всех двадцати аттракционов, начинающийся в каком-либо пункте, расположенном на внутреннем кольце. Начните обход, например, с пункта *A*.

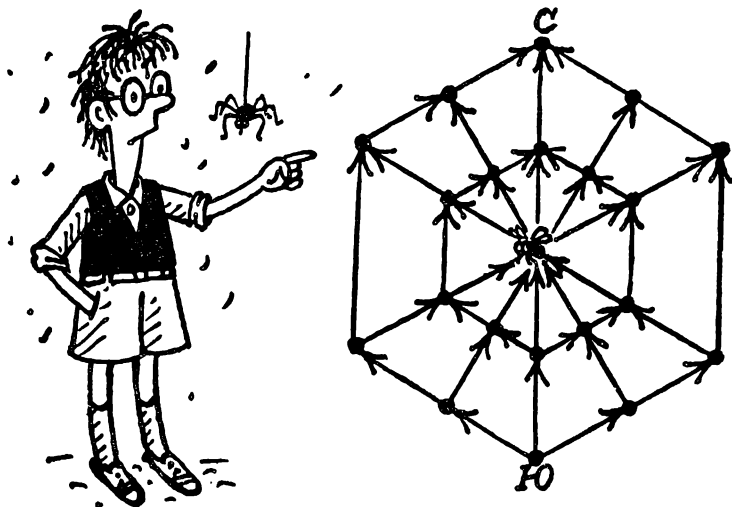


ЛАБИРИНТ ПАУКА

Иное сооружение спроектировал Мямлик и назвал его «Паук и муха». В южном узле паутины (Ю) расположился паук, а в центральном узелке — муха.

1. Сколько разных маршрутов ведут паука к его жертве — мухе, если передвигается он по паутинкам в направлениях, указанных стрелками.

2. Мямлик утверждает, что если муха окажется в самом северном узелке (С) паутины-лабиринта, то у паука будет выбор более чем из 140 маршрутов! Прав ли Мямлик?



ВАС ИНТЕРЕСУЕТ ВОЗРАСТ НАПАДАЮЩЕГО?

Комментатор футбольного матча сообщил, что средний возраст одиннадцати игроков-гостей равен 19 годам. Во втором тайме нападающий из команды гостей оставил поле из-за травмы. Судья не позволил произвести замену, вследствие чего средний возраст игроков этой команды уменьшился до 18 лет. Сколько лет выбывшему нападающему?

НОГИ И НОЖКИ

По окончании игры несколько футболистов присели отдохнуть: кто — на обыкновенный стул, а кто — на трехногую табуретку. Всех ног — человеческих и деревянных у занятых футболистами стульев и табуреток, оказалось ровно 39. Сколько стульев и табуреток было занято?

ШКОЛА? — ДА. КОЛБА? — НЕТ

28 букв русского алфавита случайным образом размещены в две строчки:

**Д Ш К О Ф С Т У З Ц Щ И Ж Г
Ч Е П М В Н Р Л А Б Ю Э Я Х**

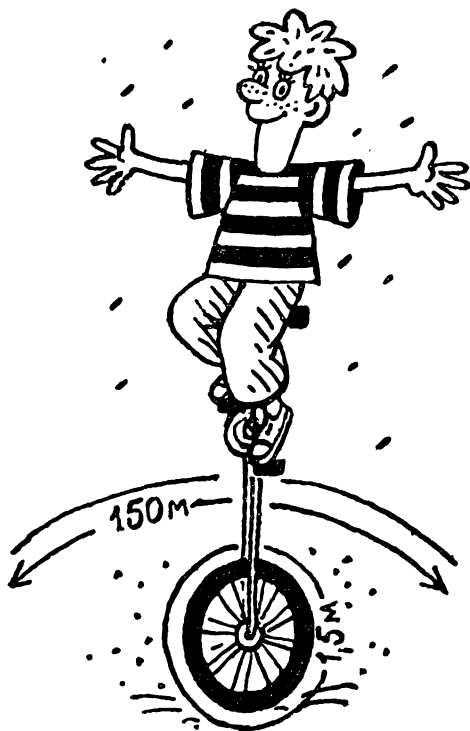
Передвигая карандаш от буквы к букве (не обязательно рядом стоящей) вдоль таблицы, двигаясь только слева направо, сверху вниз и снизу вверх можно образовать осмысленные слова. Например, ШКОЛА, ПОРТ, но нельзя образовать слово КОЛБА, так как при переходе от буквы Б к букве А пришлось бы двигаться справа налево, что запрещено. Удастся ли вам, соблюдая правила, составить осмысленное слово, состоящее из девяти или даже из двенадцати букв? Еще более длинное — вряд ли возможно при данной раскладке букв.

АМЕБЫ В КОЛБЕ

Колба, изгнанная в предыдущем эпизоде, вернулась на свое место — в лабораторию. В этой колбе биолог вывел новую разновидность долгоживущих амёб. Через каждую минуту одна амёба делится на две. Биолог кладет в колбу одну амёбу и ровно через час вся колба до краёв оказывается заполненной амёбами.

Через какой промежуток времени колба заполнится до краёв амёбами, если в колбу поместить не одну амёбу, а сразу две?

НА АРЕНЕ ЦИРКА



Арена цирка имеет в окружности 150 м, а велосипедное колесо 1,5 м.

Сколько оборотов сделает это колесо обкатив арену один раз?

ЧЕРЕЗ ПУСТЫНЮ

Каково наименьшее число носильщиков, с которыми исследователь сможет совершить шестидневный переход через абсолютно бесплодную пустыню, если он сам и каждый из носильщиков могут нести лишь четырехдневный запас пищи и воды для одного человека?

ПРИВИЛЕГИРОВАННЫЕ МЕСТА ДЛЯ НЕЧЕТНЫХ

Приглашаю на презентацию магического квадрата 7-го порядка (рис. внизу), составленного из порядковых чисел от 1 до 49 с магической суммой $S = 175$. Он очень недемократичен в распределении мест между числами: все места в очерченной части квадрата предоставлены только **НЕЧЕТНЫМ** числам, расположившимся в строгой последовательности лесенкой, сверху вниз. Умоляю вас, не давайте в обиду **ЧЕТНЫЕ** числа!

Отрежьте «уголки», занятые четными числами и соедините их в самостоятельную фигуру с таким же упорядоченным расположением четных чисел лесенкой, сверху вниз.

26	20	14	1	44	38	32
34	28	15	9	3	46	40
42	29	23	17	11	5	48
43	37	31	25	19	13	7
2	45	39	33	27	21	8
10	4	47	41	35	22	16
18	12	6	49	36	30	24

КОГДА ПОЛУЧЕНИЕ ДВОЙКИ НЕ ОГОРЧАЕТ

Катарина Ш. из Омска приглашает вас на состязание по получению двойки из пяти пятерок, связывая их любыми известными вам знаками математических действий. Сама она составила 7 вариантов:

$$(5 \cdot 5 : 5 + 5) : 5 = 2, \quad (55 - 5) : 5 : 5 = 2 \quad \text{и другие.}$$

Кто придумает больше?

Победителя состязания мы награждаем незамысловатой задачкой, присланной пятиклассницей Оксаной Ф. из Междуреченска:

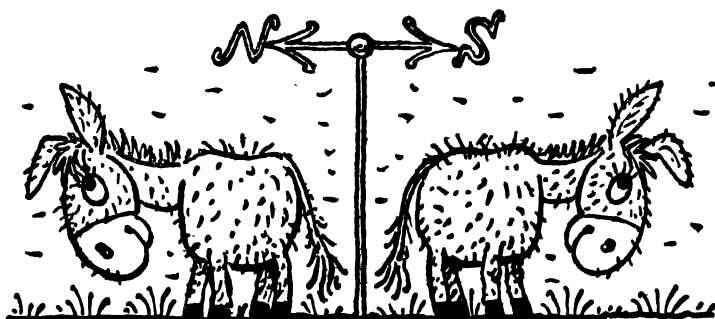
Как-то рано поутру
Птицы плавали в пруду.
Белоснежных лебедей
Втрое больше чем гусей.
Уток было 8 пар —

Вдвое больше чем гагар.
Сколько было птиц всего,
Если нам еще дано,
Что всех уток и гусей
Столько, сколько лебедей?

УСПЕХ И НЕУДАЧА ШУСТРИКА

Успех. Используя начерченный в тетради квадрат, Шустрик легко и быстро построил второй квадрат — вдвое большей площади. Как?

Неудача. Мямлик спрашивает: «Если стоят рядом два осла — один головой к северу, другой — к югу, то могут ли они увидеть уши друг у друга не поворачивая головы?»



— Конечно, нет, — шустро поспешил ответить Шустрик, а для убедительности нарисовал двух ослов, рядом стоящих, согласно условию. Но Мямлик отверг такой ответ, признав его неудачным и упрекнул Шустрика в том, что он шаблонно мыслит.

Каковы ваши соображения? Прав ли Мямлик?

В ПЕРВОМ ГОДУ ХХІ ВЕКА

Какой день будет 28 числа одного осеннего месяца 2001 года, если известно, что в этом месяце (каком?) 3 воскресных дня придутся на **ЧЕТНЫЕ** числа?

ТРИ РАЗРЯДА МАСТЕРСТВА

Три юных конькобежца одновременно начали бег по круговой дорожке. Пока первый из них делал круг, второй обгонял его на $\frac{1}{4}$ круга, а третий — на $\frac{1}{2}$ круга. Когда все трое вновь одновременно оказались в точке старта, выяснилось, что в совокупности они прошли 15 кругов.

Сколько кругов прошел каждый из конькобежцев?

И СНОВА УСПЕХ

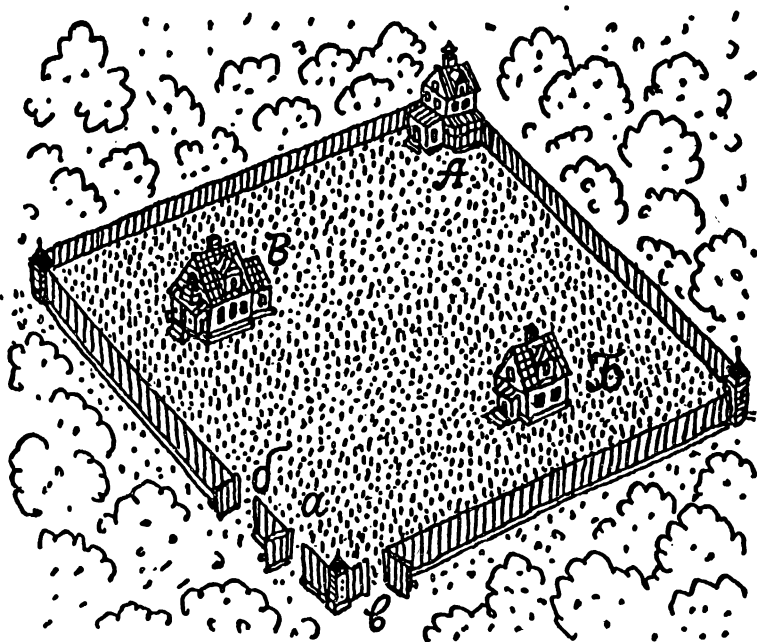
Мастер, обращаясь к ученику Шустрику: «На твоём верстаке лежат две деревянные прямоугольные пластинки. Длина каждой 31 см, ширина 8 см. Отметь на поверхности каждой пластинки её центр, имея в распоряжении только эти пластинки и карандаш».

Шустрик успешно справился с заданием и тем самым опроверг упрек в том, что он «шаблонно мыслит».

НЕДРУЖНЫЕ СОСЕДИ

Три хозяина имели три дома на одном огороженном участке. Однако, они жили недружно и владелец большого углового дома (А) жаловался, что дети соседей мешают ему спокойно проходить по участку от его дома до калитки, устроенной в противоположном углу участка. Он уговорил соседей построить каждому отдельную калитку, рядом с имеющейся, и проложить огороженную дорожку от своего дома к своей калитке: от дома А к калитке *а*, от Б к калитке *б*, от В — к *в*. При этом дорожки в пределах участка нигде не должны пересекаться.

Им это удалось. Перенесите рисунок в свою тетрадь и покажите, как были проложены непересекающиеся дорожки?



ПРОЕКТИРУЕМ ПАРКОВУЮ ДОРОЖКУ

В парке надо проложить тропинку в форме замкнутой ломаной линии, состоящей из 6 звеньев-отрезков. Тропинка должна пересекать каждое свое звено ровно один раз.

а) Нарисуйте схему такой тропинки.

б) Можно ли при тех же условиях составить замкнутую ломаную линию только из пяти звеньев? А из девяти?

ДРЕВНЕРИМСКАЯ АРИФМЕТИКА

С помощью двух цифр, записанных рядом, я составил натуральное число. Потом удалил цифру слева; в результате число увеличилось.

Отчего произошло это удивительное явление?

ПЯТЬ КИТАЯНОК В МЕТРО

В вагоне метро сидят рядом 5 девочек. Шуин сидит через столько же человек от Фэньлань, как и от Дайюй. Ису сидит через столько же человек от Шуин, как и от Дайюй. Хохотушка Аошуан сидит между двумя своими лучшими подругами. Как их зовут?

ЭТО ТАМ — В ТАНЗАНИИ

Каникулы Мбонго продолжались x дней. По его наблюдениям: 1) дождь шел один раз в день, либо с утра, либо к вечеру — всего 7 дней; 2) если дождь шел к вечеру, то утро этого дня было солнечным; 3) пять раз к вечеру устанавливалась солнечная погода; 4) шесть раз утро было солнечным.

Сколько дней продолжались каникулы Мбонго?

ДИАЛОГ В КВАРТИРЕ № 8

- Пап, а пап! Отгадай число.
- Не мешай!
- Отгадай: оно двузначное...
- Ну и что?
- Старшая цифра меньше младшей.
- И все?
- Сумма цифр — номер нашего дома.
- Ха-ха! А разность цифр — номер нашей квартиры?
- Не смейся...

Что ответил сын мы не знаем. А вот то, что отец угадал задуманное число, знаем точно. Назовите это число.

СЮЗАННА! КТО ТВОЙ БРАТ?

Однажды на детском новогоднем празднике между играми и танцами участникам предлагались задачи на сообразительность. Ответивший правильно получал приз. Четыре француженки и их братья вместе получили 32 приза: Сюзанна — 1 приз, Жаклин — 2, Колетта — 3, а Марианна — 4 приза. Жак получил столько же, сколько его сестра, Пьер вдвое больше своей сестры, Анри — втрое и Поль — вчетверо больше своих сестер.

Кто брат каждой из девочек?





НУ И ХИТРЮГА ЖЕ ШУСТРИК!

Каждый знает: чтобы отметить на листе бумаги все вершины правильного шестиугольника, надо произвольным раствором циркуля построить окружность, затем, не изменяя раствора циркуля, «шагать» его ножками по окружности, делая на ней 6 засечек. Эти засечки и будут вершинами правильного шестиугольника.

Но вот однажды наш веселый и находчивый Шустрик сумел отметить на чистой странице школьной тетради все шесть вершин правильного шестиугольника пользуясь также только циркулем, причем — не вынимая ножки циркуля из того места, в которое первоначально ее поставил (следовательно, не «шагая» циркулем по окружности), и не сгибая листа бумаги. Затем он доказал, что отмеченные им точки являются вершинами правильного шестиугольника.

Разгадайте хитрость Шустрика!

САМ СЕБЯ УДИВИЛ

Как-то раз я написал 10 натуральных чисел, сложил их и в сумме получил 20. Потом эти же числа я решил перемножить и очень удивился тому, что в произведении получил тоже 20. Какие числа я складывал и перемножал?

Позже я позволил себе писать не 10, а сколько угодно натуральных чисел, сумма и произведение которых образуют одно и то же заранее назначенное число n , и вскоре понял, что это безотказно удастся лишь для определенного вида чисел n .

Какого?

ЧЕТЫРЕ ДАМЫ С МУЖЬЯМИ

В один из праздничных дней пришли ко мне Андрей, Борис, Владимир и Григорий с женами. Танцуя, молодые люди обменивались дамами. В какой-то момент я заметил, что Елена танцевала с Андреем. Дора оказалась в паре с мужем Жанны, а Зоя — с мужем Доры. Борис в этот момент танцевал с женой Владимира, а Владимир — с женой Андрея. Кто на ком женат и кто с кем танцевал в тот момент, к которому относится моя информация?

ТОЧКИ В СТРОЧКЕ

В девятизначном числе 2...9...0 Шустрик так ловко заменил точки цифрами, что образовалось число делящееся на все порядковые числа от 1 до 22 включительно.

Какое число получилось у Шустрика?

Возможно ли другое девятизначное число с той же великолепной делимостью на те же числа?

В ДЕЛЕНИЕ ВМЕШИВАЮТСЯ СКОБКИ

Ничего не изменяя в записи выражения $2:3:4:5:6$, расставьте скобки умело и вы получите **ПЯТЬ**. При другой расстановке скобок, это же выражение обратится в число **80**, а в третий раз уже никакая комбинация скобок не обратит данное выражение в целое число, но **ТРОЕЧКУ С ДВУМЯ ДЕСЯТЫМИ** сформировать удастся!

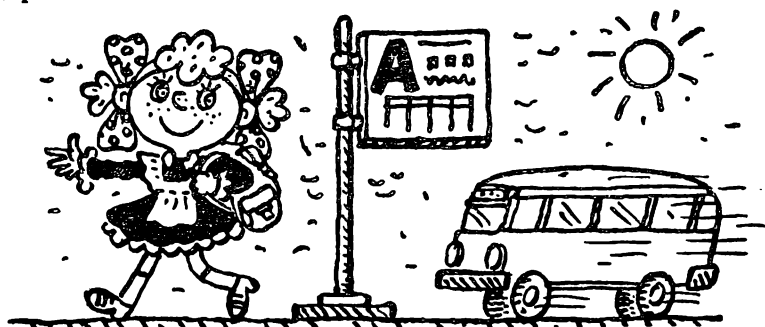
ПРО ЯПОНСКУЮ ДЕВОЧКУ ЮККО

Юкко увлекалась куклами и математикой. Однажды я спросил ее: «Сколько же у тебя кукол?» С лукавой улыбкой она быстро ответила: «А вот сколько: семь восьмых всех моих кукол плюс семь восьмых одной куклы».

Сколько же кукол у Юкко?

ДОЛЬШЕ, НО ПОЛЕЗНЕЕ

Сначала Катя ходила в школу пешком, а возвращалась автобусом. Вся дорога занимала $\frac{3}{4}$ часа. Потом она стала ездить на автобусе туда и обратно. В этом случае вся дорога занимала 18 минут. Теперь Катя ходит пешком и в школу, и из школы — так полезнее! Сколько времени занимает ее дорога?



ПРАКТИЧЕСКАЯ АРИФМЕТИКА

(Две шутки)

1. Малыш, подойдя к прилавку, взглянул на ценник и прочитал: «4 банана за 3 рубля», и рассудил он так: «4 банана — 3 р., значит, 3 банана за 2 р., 2 — за 1 р., 1 банан — за 0 р. Я возьму 1 банан».

2. Продавец коробок с конфетами «Вишня в шоколаде» не рассуждает, но ведет ежедневно точный учет проданных коробок и оставшихся:

	Продано	Осталось
1-й день	20	30
2-й день	15	15
3-й день	9	6
4-й день	6	0
Всего коробок	50	51 (?)

Откуда взялась лишняя коробка?

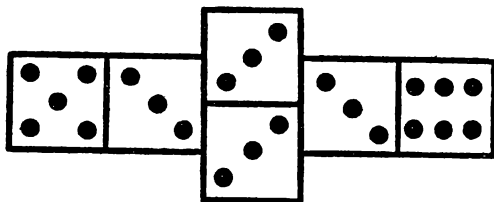
ЗАБАВНЫЕ СОВПАДЕНИЯ

В конкурсе танцевальных пар приняли участие n девочек и m мальчиков, $m > n$. Один из поклонников этого вида искусства подметил курьезные совпадения:

у каждого мальчика побывали партнершами в танцах по две девочки, а у каждой девочки — партнерами по три мальчика;

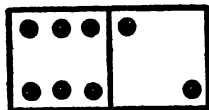
если из n девочек мысленно образовать все возможные пары, то окажется, что каждый мальчик побывал партнером у обеих девочек какой-то одной из этих пар.

Сколько девочек и мальчиков участвовало в конкурсе?



Ака, Бяка, Вяка и Гика, начиная игру в домино, взяли по 7 плиток каждая. Правила игры обычные, но первой плиткой, выложенной на стол, могла быть любая из принадлежащих Аке. К плитке, выставленной Акой, Бяка, за ней Вяка и затем Гика приставляли подходящие плитки. В той же последовательности они выставили по второй плитке, а девятой, выставленной Акой, оказалась плитка 2 : 6.

Восстановите последовательность первых восьми плиток, если я сообщу суммарное число очков на паре плиток, выложенных на стол каждой из девочек: у Аки — 23, у Бяки — 20, у Вяки — 18 и у Гики — 16.



ВНУЧКИ С БАБУШКОЙ, ВНУКИ С ДЕДУШКОЙ

Две соседние квартиры одного дома принадлежат двум семьям: бабушке с двумя внуками — одна квартира, дедушке с двумя внуками — другая. Каков возраст всех шести обитателей этих квартир — вы определите, зная, что произведение возрастов бабушки и двух ее внуков равно 1296, а сумма их возрастов равна номеру дома, в котором их квартира. По забавному стечению обстоятельств все сказанное относится и к дедушке с его двумя внуками.

Каков номер дома, в котором живут дед да баба со внучатами?

УГАДАТЬ ТАЙНО ВЫБРАННОЕ ИМЯ

Подготовьте список из 80 различных имен и придайте каждому имени числовой шифр: от -40 до $+40$, пропустив 0. Это — для себя. Для демонстрации фокуса приготовьте 4 карточки достаточных размеров для вписывания имен. На одной стороне каждой карточки напишите: «Глаза черные», на другой стороне — «Глаза голубые». На одной из этих карточек напишите «Брюнет», на второй — «Блондин», далее — «Шатен» и на четвертой — «Рыжий».

Запомните ключевые шифры: 27 — брюнет, 9 — блондин, 3 — шатен, 1 — рыжий, (+) — черные глаза, (—) — голубые глаза.

Шифры не следует сообщать тем, кому показываете фокус.

На каждой стороне карточки заранее написаны вами имена. Некоторые из них повторяются на других карточках. Как распределить имена по карточкам, будет ясно из дальнейшего.

Избравший имя находит его на карточках и вам сообщает «приметы», например: «голубоглазый блондин», или «черноглазый шатен», или «рыжий с голубыми глазами». Вы «в уме» расшифровываете: $-9 + 3 - 1 = -7$ и сообщаете имя, которое в списке зашифровано числом -7 . Ясно, что это имя должно быть написано на трех карточках (по числу слагаемых): блондин на «голубоглазой» стороне, шатен на «черноглазой» стороне и рыжий — на «голубоглазой» стороне.

На каких карточках вы запишете имя, зашифрованное в списке числом 18? Ответ следует из равенства $18 = 27 - 9$: на стороне «Глаза черные» карточки «Брюнет» и на стороне «Глаза голубые» карточки «Блондин».

Примечание. Можно ограничиться меньшим числом имен, например, тридцатью с шифром от -15 до $+15$.

ЧИСЛОВОЙ ТРЮК

Запишите, свой возраст (округленный до целого числа лет) подряд три раза. Чаще всего образуется шестизначное число. В буквенной записи оно имеет вид

$$\overline{ababab},$$

где a и b — цифры (на это указывает черта сверху). Это число непременно разделится без остатка на 7, на 13 и даже на 111. Так будет и с числом лет мамы, папы, бабушки (если ей меньше 100 лет), брата и сестренки. В этом и трюк!

Если кому-то меньше 10 лет, например только 8, то записывайте так: 080808 или с переставленными цифрами: 808080. Оба числа делятся и на 7, и на 13, и на 111.

Многие из вас, конечно найдут доказательство делимости на 7, 13 и на 111 любого шестизначного числа вида \overline{ababab} .

СТО И ОДНА

Употребляя в записи целого числа буквы вместо цифр, ставят черту над буквами. Например, \overline{abc} — трехзначное число с цифрами a , b и c , \overline{aa} — двузначное, у которого обе цифры одинаковы.

Зная это, Ляля написала: $\overline{aa} + \overline{aa} - a - a$, полагая, что с помощью любых шести одинаковых цифр выразила число 100.

Действительно, если $a = 5$, то $55 + 55 - 5 - 5 = 100$. Но, увы, с другими значениями цифры a число 100 не формируется.

Позже Ляле удалось скомбинировать шесть цифр a так, что 100 формировалось при любом значении цифры a . А вам удастся?

ФОКУС

Задумайте три числа с разностью в 3 единицы между ними. Меньшее число удвойте и прибавьте среднее, увеличенное на 5 единиц. Удвойте получившуюся сумму, прибавьте большее число, увеличенное в 5 раз и скажите мне получившийся результат. Я немедленно назову задуманные вами числа. Разгадайте секрет этого фокуса!

ЕЩЕ ФОКУС

Тайно от меня задумайте число с нечетным количеством цифр при условии, что средняя цифра не 9, а сумма остальных цифр делится на 9. Мне сообщите сумму всех цифр задуманного числа, а я безошибочно назову среднюю цифру задуманного числа.



Пример.

Задуманное число: 2 763 858
($2 + 7 + 6 + 8 + 5 + 8 = 36$ — делится на 9). Сообщаете сумму всех цифр: 39. Я угадываю: средняя цифра: 3. Секрет угадывания раскрыт на странице 61.

Но, может быть, догадаетесь?!

УГАДАТЬ ЧИСЛО, НИЧЕГО НЕ СПРАШИВАЯ

«От мала до велика», — все кто умеет складывать целые числа, будут ошеломлены вашим мастерством: ничего не спрашивая, угадывать число, получаемое участником сеанса показа фокуса в результате выполнения им некоторых действий.

Предложите тайно от вас — угадывателя: 1) расположить на листке бумаги числа от 1 до 25 последовательно в форме квадратной таблицы 5×5 (см. рис.); 2) обвести кружком любое число таблицы (пусть обвели число 7) и вычеркнуть столбец и строку, содержащее это число; 3) обвести кружком любое из незачеркнутых чисел таблицы (положим, обвели 23) и вычеркнуть столбец и строку, содержащие это число, и т.д. Надо продолжать так делать пока не окажутся зачеркнутыми все столбцы и строки таблицы. На рисунке представлен один из возможных вариантов. После этого пусть исполнитель вычислит сумму всех чисел, обведенных кружками, предварительно увеличив каждое из них на m единиц (назначаете конкретное значение m , каждый раз — разное).

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

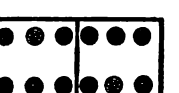
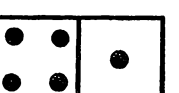
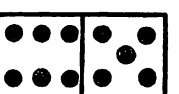
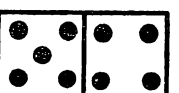
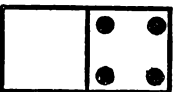
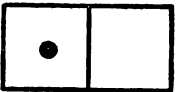
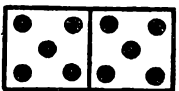
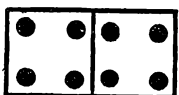
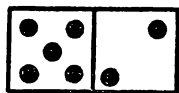
Теперь вы объявляете «угаdyваемую» сумму: « $65 + 5m$ ».

Для таблицы 6×6 из чисел от 1 до 36 «угаdyваемая» сумма также не зависит от выбора чисел, обводимых кружками и всегда равна $111 + 6m$, где m — произвольное, вами назначенное число.

Вообще, для таблицы $n \times n$ из чисел 1, 2, 3, ..., n^2 сумма чисел, обводимых кружками, постоянна и равна $\frac{(1+n^2)n}{2}$.

Для «любителей» все это — фокус, но истинных «рыцарей» математики скорее всего увлечет поиск обоснования закономерности, обеспечивающей успех фокусу.

СЕКРЕТ СИСТЕМЫ РАСКЛАДКИ



Беру 12 плиток домино с числами очков от 1 до 12, выкладываю на стол в последовательности, как на рисунке, только перевернутыми пятнышками вниз и заявляю, что в результате легких прикосновений к плиткам угадаю местоположение каждой: сначала — обладающей одним очком, затем — двумя, тремя, и т.д. Не думайте, что я запомнил в какой последовательности расположены плитки домино. Это не облегчило бы угадывание, так как угаданную плитку я буду удалять, оставшиеся на столе — сближать.

В основе угадывания — не запоминание, а некоторая система расчета.

Начиная фокус, я потрогал первую плитку, вторую, третью, четвертую открываю. «Одно очко» — торжественно произношу. Отбрасываю эту плитку в сторону. Продолжаю трогать ниже лежащие плитки. Первую, вторую пропускаю, открываю третью: «2 очка!» Эту плитку — в сторону. Пропускаю две и открываю опять третью: «3 очка!» Пропускаю последние две плитки, за ними — сверху — первые три, следующую открываю: «4 очка!»

Продолжаю применять свою таинственную систему отсчета «на ощупь». Плиток на столе остается меньше и меньше, а я без промаха вскрываю: «5», «6», «7», «12» очков!

Разгадайте секрет моей системы и этого фокуса!

МУЖЕСТВЕННЫЕ — НАЛЕВО, ЖЕНСТВЕННЫЕ — НАПРАВО

В древнем Китае почему-то нечетные числа считались мужественными, а четные — женственными.

1. Взгляните на числовое равенство:

$$75\frac{1}{3} + 9 = 84 + \frac{2}{6}.$$

Левая часть равенства сформирована из всех нечетных («мужественных») цифр, правая — из четных («женственных», но без нуля), причем каждая цифра употреблена только по одному разу.

Найдите еще один вариант аналогичного равенства с использованием дробных чисел и один вариант целочисленного равенства с той же особенностью расположения цифр.

2. Условия головоломки те же, но обе части равенства должны быть сформированы только из однозначных чисел с применением четырех арифметических действий. Найдите не менее двух решений.



«ДА ХОТЬ КОГО СМУТЯТ ВОПРОСЫ БЫСТРЫЕ» (А. Грибоедов)

Этой цитатой озаглавлен небольшой ТЕСТ-ВИКТОРИНА, обнаруженный на дне нашего «ларца», который как вы убедились, действительно «просто открывался».

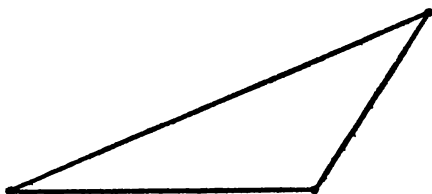
1. Что больше: сумма всех однозначных неотрицательных чисел или их произведение?

2. Казалось бы лупа должна увеличивать все без исключения предметы, но все же существуют такие объекты, которые лупа не увеличивает. Какие же?

3. Почти такое же большое, как Останкинская телебашня в Москве, а не весит ни грамма. Что же это?

4. В музее я видел большие красивые часы с боем и заметил, что пять ударов они отбивают за 20 секунд ровно. За сколько секунд они отобьют 10 ударов?

5. За одну минуту размышлений придумайте способ построения трех углов, равных углам начерченного произвольного треугольника, пользуясь только одной линейкой.



6. Кладу гирьку 1 г на левую чашку весов, 2 г — на правую, 3 г — вновь на левую, 4 г — на правую и т.д. до 100 г включительно. На сколько граммов превысит груз на правой чашке весов?

7. Какой цифрой оканчивается произведение всех нечетных двузначных чисел?

8. Возможно ли число, большее своего квадрата?

9. Каждая из двух противоположных сторон квадрата удлинена на 5 единиц, а каждая из двух других сторон укорочена на 5 единиц. Как изменилась площадь?

10. В какую букву надо вписать число (и какое?), чтобы оно увеличилось:

а) на единицу (два решения); б) на 10; в) на 100?

11. Как, употребляя 4 нуля (и никаких других цифр), записать возраст автора книги «Математические заглазки» за 5 лет до первого года XXI в., затем, с помощью одного арифметического действия, преобразовать эту запись в ЕДИНИЦУ?



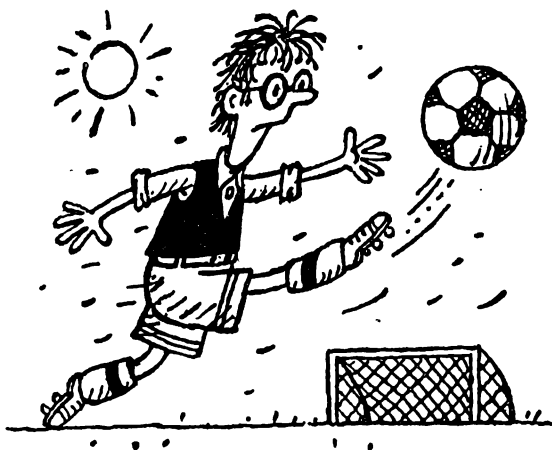
12. Два шалуна дерутся (см. картинку), а третий смотрит на них. Найдите третьего. Где он?

13. Для записи какого числа нет знака в римской нумерации?

14. Как от куска ленты длиной в $\frac{2}{3}$ м отрезать ровно $\frac{1}{2}$ м не прибегая к измерениям?



РЕШЕНИЯ

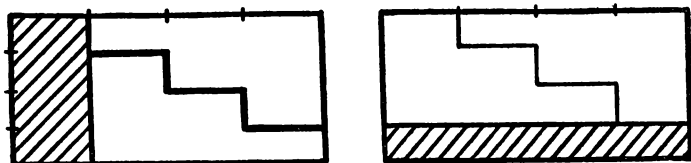


ОДНАЖДЫ...

1. Угощаемых женщин было не 4, а 3: первая — мама второй, а вторая — мама третьей. Вот и получилось две мамы и две дочери.

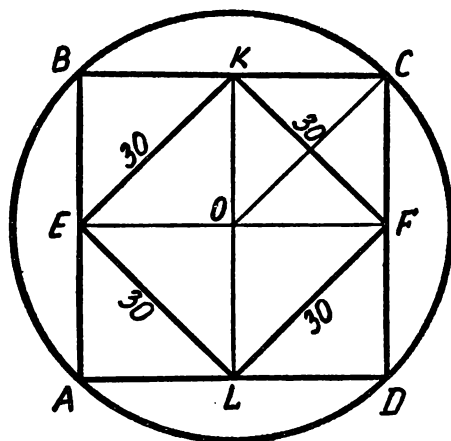
2. Мальчикам по одному щенку. Полагаю, они не обидятся, если девочке подарены два щенка. Условие задачи выполнено: никто не получил щенков больше, чем остальные. Маленький нюанс: если бы в условии было сказано: «...чем каждый из остальных», задача оказалась бы неразрешимой.

3. Мямлик победит, если будет ставить свои лады симметрично ладам Шустрика относительно центра доски.



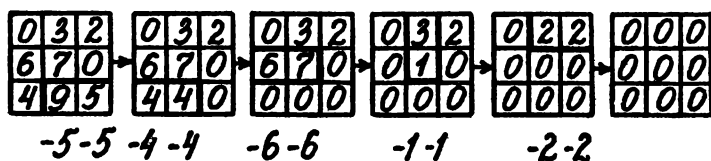
4. См. рисунок сверху. Заштрихованные полосы отброшены. Для оставшихся кусков линия разреза показана жирно на рисунке слева, а на рисунке справа — вариант покрытия.

5. Построила диагонали EF и KL малого квадрата (рис. внизу), радиус OC и обосновала равенство $KF = OC = 30$ мм.



6. Это были: дед, его сын и сын его сына. Дед передал сыну 600 книг, из них 400 книг сын деда передал своему сыну. Поэтому совместный книжный фонд двух сыновей увеличился лишь на 600 книг.

7. Последовательность действий по выпусканию птиц из клетки показана на рисунке:



8. Возможность освобождения всех птичек из неволи при соблюдении заданных условий обеспечивается тем, что на каждом этапе операции количество птичек в угловых секциях и центральной остается равным количеству птичек в остальных четырех секциях клетки (см. рисунок):

$$0 + 2 + 4 + 5 + 7 = 3 + 6 + 9 + 0,$$

затем

$$0 + 2 + 4 + 0 + 7 = 3 + 6 + 0 + 4,$$

затем

$$0 + 0 + 0 + 2 + 7 = 3 + 6 + 0 + 0, \dots$$

и наконец, на пятом этапе $0 = 0$.

Желание Мямлика неосуществимо потому, что привело бы к неверному равенству: $1 = 0$ или $2 = 0$.

9. См. рисунок:

	32		8		
28	=	26	+	2	
	14	=	4	+	10
16	+	6	=	22	
	18	+	12	=	30
		20		24	

10. СИНИЦА = 342457, ПТИЧКИ = 684914.

И ЕЩЕ МНОГО РАЗ...

Пусть половинки плитки домино содержат a и b очков. Тогда сообщенный результат: $(2a + m) \cdot 5 + b = 10a + b + 5m$. Вычитая $5m$, получим: $10a + b$, где a и b — искомые числа.

ЧИРИК, ЧИРИК!

Первоначальная стайка синичек убавилась на 5 птиц. Оставшиеся 18 птиц разместились на крыше (одна часть) и на изгороди (две части). Считаем: $18 : 3 = 6$. Значит, на крышу село 6 и на изгородь — $12 + 5 = 17$ синичек.

А В КОРОБКАХ КОНФЕТКИ

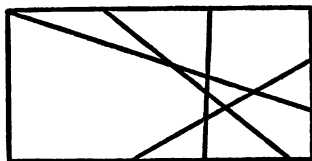
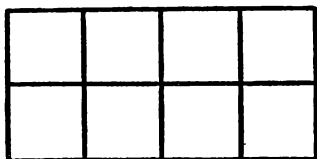
Секрет решения заложен в красивом свойстве числа 3737. Оно разлагается только на два множителя: $3737 = 37 \cdot 101$, и оба множителя — простые числа. Теперь ответ очевиден: коробок 37, а конфеток в каждой 101.

ТАНЕЧКА, ХОЧЕШЬ ПРЯНИЧКА?

Последовательность перекладываний представлена таблицей:

11	7	6
4	14	6
4	8	12
8	8	8

Возможные схемы рассечения пряников на 8 равных и 11 произвольных частей показаны на рисунке.



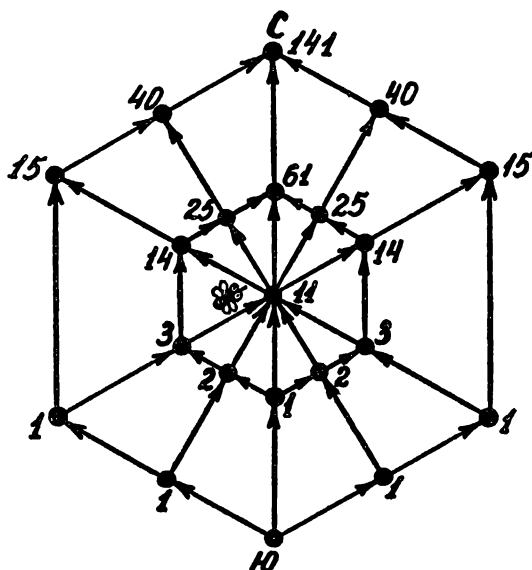
ОН СКАЗАЛ ПРАВДУ

День рождения мальчика 31 декабря, а разговор произошел 1 января. 30 декабря ему было еще 10 лет, 1 января ему уже 11 лет, 31 декабря того же года ему будет 12 лет, а через год — 13 лет!

ШУСТРИК ПРОЕКТИРУЕТ

Например,

A F P O N U Q R G H B C K J S T L M D E A.



ЛАБИРИНТ ПАУКА

Чтобы не запутаться в подсчете числа возможных маршрутов паука, отмечайте в каждом узелке по ходу передвижения паука суммарное число путей, ведущих к этому узелку паутины. Получится, что в центральный узел паутины ведут $3 + 2 + 1 + 2 + 3 = 11$ различных маршрутов. В узел С — $40 + 61 + 40 = 141$ маршрут.

ВАС ИНТЕРЕСУЕТ ВОЗРАСТ НАПАДАЮЩЕГО?

Суммарный возраст полного состава команды равен $19 \cdot 11 = 209$ (лет). Суммарный возраст десяти игроков составляет $18 \cdot 10 = 180$ (лет). Значит, возраст выбывшего нападающего: $209 - 180 = 29$ (лет).

НОГИ И НОЖКИ

Три ножки табуретки и две ноги сидящего на ней человека составляют 5 ног; четыре ножки стула и две ноги сидящего составляют 6 ног. Каждая пара — стул и табуретка с сидящими на них — это $5 + 6 = 11$ ног. Считаем: $39 : 11 = 3$ и 6 в остатке — как раз для одного стула с человеком. Значит, табуреток 3, а стульев 4. Проверяем: $5 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 39$.

ШКОЛА? — ДА. КОЛБА? — НЕТ

Декорация. Демонстрация.

АМЕБЫ В КОЛБЕ

Если положить в колбу одну амёбу, то через минуту их там окажется две, а через час колба заполнится до краев. Следовательно, если положить в колбу две амёбы, то колба заполнится до краев через 59 минут.

НА АРЕНЕ ЦИРКА

101 оборот: 100 вокруг своей оси и 1 вокруг арены.

ЧЕРЕЗ ПУСТЫНЮ

Достаточно двух носильщиков. Один возвращается после первого дня пути, другой возвращается после второго дня пути. Тогда на 4 оставшихся дня пути у исследователя будет как раз четырехдневный запас пищи и воды.

ПРИВИЛЕГИРОВАННЫЕ МЕСТА ДЛЯ НЕЧЕТНЫХ

Решение на рисунке:

		8	2		
	22	16	10	4	
36	30	24	18	12	6
44	38	32	26	20	14
	46	40	34	28	
		48	42		

КОГДА ПОЛУЧЕНИЕ ДВОЙКИ НЕ ОГОРЧАЕТ

Семь решений Катарины:

$$\begin{aligned}
 (5 \cdot 5 : 5 + 5) : 5 &= 2, & (5 + 5 - 5 + 5) : 5 &= 2, \\
 (55 - 5) : 5 : 5 &= 2, & (5 + 5) \cdot 5 : 5 : 5 &= 2, \\
 (5 + 5) : 5 + 5 - 5 &= 2, & (5 + 5) \cdot 5 : (5 \cdot 5) &= 2, \\
 (55 - 5) : (5 \cdot 5) &= 2.
 \end{aligned}$$

Будь Катарина постарше, могла бы предложить еще три варианта:

$$\begin{aligned}
 5^5 - 5 + 5 : 5 &= 2, & (5 : 5)^5 + 5 : 5 &= 2, \\
 \sqrt[5]{5 : 5} + (5 : 5) &= 2.
 \end{aligned}$$

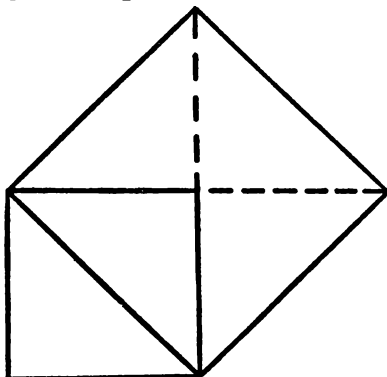
Если употребить символ $[x]$ — наибольшее целое число, не превышающее x , то возможен такой вариант:

$$([5,5] + [5,5]) : 5 = 2.$$

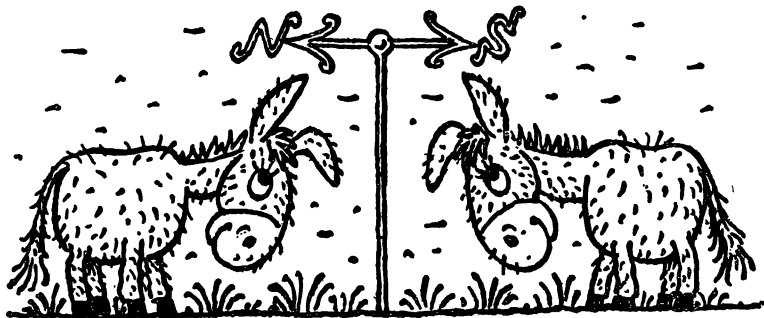
Ответ на задачу Оксаны: лебедей — 24, гусей — 8, уток — 16 и гагар — 8, всего 56 птиц.

УСПЕХ И НЕУДАЧА ШУСТРИКА

Успех. На диагонали начерченного квадрата, как на стороне, построил второй квадрат.



Неудача. Ответ на вопрос Мямлика неудачен тем, что неполон. Ослы могут стоять не только «бок о бок», «хвост к хвосту», но и «голова к голове» в одном ряду, т.е. также рядом. В этом случае ответ, очевидно, «да».



В ПЕРВОМ ГОДУ XXI ВЕКА

Сентябрь 2001 года — пятница. Воскресенье может наступить по четным числам 3 раза в месяц только 2, 16 и 30 числа. Значит, в этом месяце 28-е число — пятница.

ТРИ РАЗРЯДА МАСТЕРСТВА

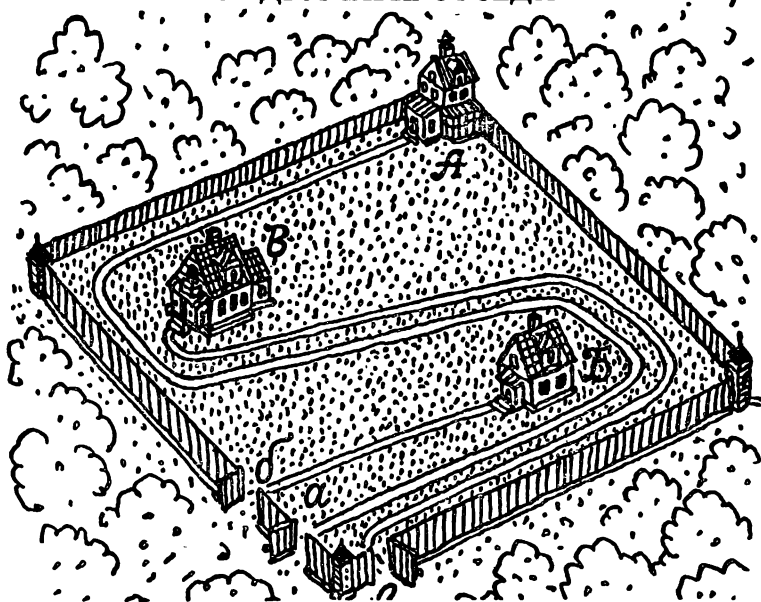
4, 5 и 6 кругов.

И СНОВА УСПЕХ

На длинных сторонах пластинки от их концов с помощью второй пластинки 4 раза откладываем как бы ширину пластинки, т.е. 4 отрезка длиной по 8 см. Отмеченные 4 точки являются вершинами воображаемого «внутреннего» прямоугольника. Проводим его диагонали. (Длина диагонали «внутреннего» прямоугольника равна $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17 < 31$, следовательно, длинной стороны второй пластинки хватит, чтобы провести эти диагонали.) Точка их пересечения и есть центр размечаемой прямоугольной пластинки.

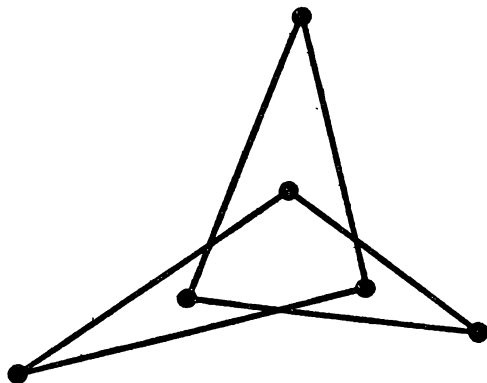


НЕДРУЖНЫЕ СОСЕДИ



ПРОЕКТИРУЕМ ПАРКОВУЮ ДОРОЖКУ

а) Примерная схема на рисунке:



б) Невозможно для всякого нечетного числа звеньев. Ведь на каждом звене есть только одна точка самопересечения и она принадлежит только двум звеньям. Значит, непременно должно быть четное число звеньев: их не может быть ни 5, ни 9.

ДРЕВНЕРИМСКАЯ АРИФМЕТИКА

Это происходит с некоторыми числами, записанными римскими цифрами, например, как на рисунке внизу.

$$\begin{array}{c} \overline{\text{IV}} \\ \overline{\text{V}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \overline{\text{IX}} \\ \overline{\text{X}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} CD \\ D \end{array}$$

ПЯТЬ КИТАЙНОК В МЕТРО

Удовлетворяющий условию порядок расположения: Д-И-Ш-А-Ф. Лучшие подруги Аошуан: Шуин и Фэньлань.

ЭТО ТАМ — В ТАНЗАНИИ

Условие задачи представим таблицей:

День	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й
С утра	С	С	С	С	С	С	Д	Д	Д
К вечеру	Д	Д	Д	Д	Д	С	С	С	С

С — солнце, Д — дождь.

Каникулы Мбонго продолжались

$$\frac{6+5+7}{2} = 9 \text{ дней.}$$

ДИАЛОГ В КВАРТИРЕ № 8

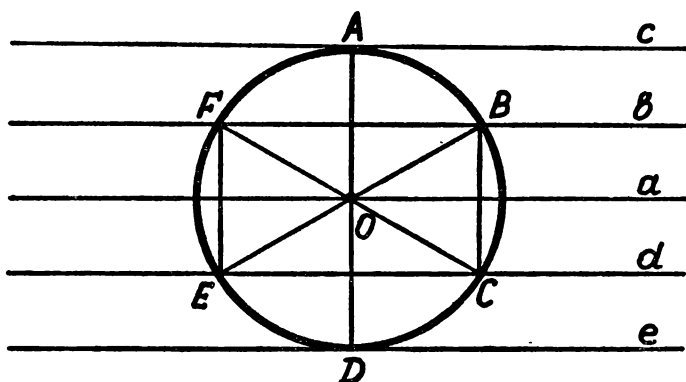
Задуманное сыном число — двузначное и разность цифр равна восьми. (Взгляните на заголовок задачи!) Значит, цифры задуманного числа 9 и 1. Старшая цифра меньше младшей, следовательно, задуманное сыном число 19, а живут сын и папа в доме № 10.

СЮЗАННА! КТО ТВОЙ БРАТ?

У Сюзанны брат Анри, у Жаклин — Поль, у Коветты — Жак, у Марианны — Пьер.

НУ И ХИТРЮГА ЖЕ ШУСТРИК!

Шустрик выполнил построение на странице из тетради «в линейку». Он поставил ножку циркуля в произвольную точку O на одной из линий тетради. На рисунке это — линия a . Раствор циркуля взял таким, чтобы построенная окружность касалась тетрадных линий через одну (на рисунке — прямые c и e). Пусть A и D — точки касания окружности и прямых c и e ; B, F, C, E — точки пересечения окружности соответственно с прямыми b и d . Точки A, B, C, D, E, F и есть вершины правильного шестиугольника.



Доказательство. Радиус $OA = OB = OC = OD$, следовательно треугольник OBC — равносторонний. По той же причине треугольник FOE — равносторонний и треугольник FOE равен треугольнику OBC . Значит, B, C, F, E — вершины шестиугольника, а в силу симметрии середины дуг BF и CE — точки A и D — также являются вершинами правильного шестиугольника.

САМ СЕБЯ УДИВИЛ

$$20 = 10 + 2 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{8 \text{ единиц}} = 10 \cdot 2 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{8 \text{ единиц}}$$

Возможно для любого составного числа n , например,

$$20 = 5 + 2 + 2 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{11 \text{ единиц}} = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{11 \text{ единиц}}$$

$$51 = 17 + 3 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{31 \text{ единица}} = 17 \cdot 3 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{31 \text{ единица}}$$

ЧЕТЫРЕ ДАМЫ С МУЖЬЯМИ

Имеем информацию из пяти пунктов:

(1) Елена танцевала с Андреем. (2) Дора — с мужем Жанны. (3) Зоя — с мужем Доры. (4) Борис — с женой Владимира. (5) Владимир — с женой Андрея.

Из (1) и (5) следует: жена Андрея — не Елена. Предположим — Жанна, тогда из (2) следует что Дора танцевала с Андреем, а это противоречит условию (1). Предположим, что жена Андрея — Дора, тогда из (3) следует, что Зоя танцевала с Андреем — противоречие с (1). Остается одна возможность: женой Андрея является Зоя и из (5) следует: (6) Владимир танцевал с Зоей. Из (6) и (3) следует: (7) Владимир женат на Доре. Из (7) и (4) следует: (8) Борис танцевал с Дорой. Завершайте цепочку рассуждений самостоятельно.

Ответ. Женаты:

Андрей на Зое, Борис на Жанне, Владимир на Доре, Григорий на Елене.

Танцевали:

Андрей с Еленой, Борис с Дорой, Владимир с Зоей, Григорий с Жанной.

ТОЧКИ В СТРОЧКЕ

Шустрик нашел наименьшее общее кратное заданным числам: 232792560.

В ДЕЛЕНИЕ ВМЕШИВАЮТСЯ СКОБКИ

$$5 = (2 : 3) : (4 : 5 : 6), \quad 80 = 2 : (3 : 4 : 5 : 6), \\ 3,2 = 2 : (3 : (4 : (5 : 6))).$$

ПРО ЯПОНСКУЮ ДЕВОЧКУ ЮККО

Если у Юкко n кукол, то $n = \frac{7}{8}n + \frac{7}{8}$, откуда $n = 7$.

У Юкко 7 кукол.

ДОЛЬШЕ, НО ПОЛЕЗНЕЕ

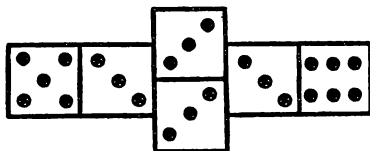
Путь на автобусе в один конец занимает 9 мин. Следовательно, первоначально Катя шла до школы $45 - 9 = 36$ мин. На дорогу пешком в школу и обратно потребуется ей $36 \cdot 2 = 72$ мин = 1 ч 12 мин.

ПРАКТИЧЕСКАЯ АРИФМЕТИКА

2. Лишней коробки нет. Сложение чисел правого столбца бессмысленно.

ЗАБАВНЫЕ СОВПАДЕНИЯ

4 девочки и 6 мальчиков. Из n девочек возможно образовать $\frac{n(n-1)}{2}$ пар. Из условия следует: $m = \frac{n(n-1)}{2}$ и $m = \frac{3n}{2}$, или $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n}{2}$, откуда $n = 4$, $m = 6$.



Суммарно на двух плитках Аки — 23 очка. Это значит, что Ака имела плитки $\boxed{6\ 6}$ и $\boxed{6\ 5}$. Бяка имела плитки $\boxed{6\ 4}$ и $\boxed{5\ 5}$ (суммарно 20). Вяка имела $\boxed{6\ 3}$ и $\boxed{5\ 4}$ и Гика — $\boxed{5\ 3}$ и $\boxed{4\ 4}$.

Ака не могла начать игру с плитки $\boxed{6\ 6}$, так как в любом варианте продолжения оказалось бы невозможным выложить в цепочку все 8 вышеуказанных плиток. (Убедитесь!) Следовательно, Ака начала игру с плитки $\boxed{6\ 5}$, и игра продолжалась так:

А Б В Г

I раунд ... $\boxed{6\ 5}$ $\boxed{5\ 5}$ $\boxed{5\ 4}$ $\boxed{4\ 4}$

А

Б

В

Г

II раунд $\boxed{6\ 6}$...

$\boxed{4\ 6}$ $\boxed{6\ 3}$ $\boxed{3\ 5}$

9-я плитка: $\boxed{2\ 6}$

ВНУЧКИ С БАБУШКОЙ, ВНУКИ С ДЕДУШКОЙ

Варьируя разложение числа 1296 на три множителя, получим ряд правдоподобных предположений о возрасте. Например, $1296 = 108 \cdot 4 \cdot 3 = 81 \cdot 16 \cdot 1 = 81 \cdot 8 \cdot 2 = 72 \cdot 18 \cdot 1 = 72 \cdot 9 \cdot 2 = 72 \cdot 6 \cdot 3 = 54 \cdot 12 \cdot 2 = 54 \cdot 8 \cdot 3$.

Только в двух вариантах получаются одинаковые суммы:

$$81 + 8 + 2 = 91 \text{ и } 72 + 18 + 1 = 91.$$

Бабушке 72 года, дедушке 81 или наоборот, и живут они в доме № 91.

ЧИСЛОВОЙ ТРЮК

Используем другой вид записи образующегося шестизначного числа: $\overline{ababab} = (10^4 + 10^2 + 1)\overline{ab} = 10101\overline{ab} = 7 \cdot 13 \cdot 111 \cdot \overline{ab}$.

СТО И ОДНА

$$\frac{\overline{aaa} - \overline{aa}}{a}; \text{ например, } \frac{777 - 77}{7} = 100.$$

ФОКУС

Из объявленного результата S я вычитаю 46, результат делю на 11 и получаю задуманное вами меньшее число.

Пусть задуманные числа x , $x + 3$, $x + 6$. Тогда

$$S = (2x + (x + 3 + 5)) \cdot 2 + 5(x + 6),$$

откуда

$$x = \frac{S - 46}{11}.$$

ЕЩЕ ФОКУС

При указанных условиях средняя цифра числа является так называемым «числовым корнем», т.е. равняется сумме цифр числа, доведенной, в результате повторения сложения, до однозначного результата. В примере:

$$39 \Rightarrow 3 + 9 = 12, \quad 12 \Rightarrow 1 + 2 = 3.$$

УГАДАТЬ ЧИСЛО, НИЧЕГО НЕ СПРАШИВАЯ

Для таблицы 5×5 сумма чисел первой строки:

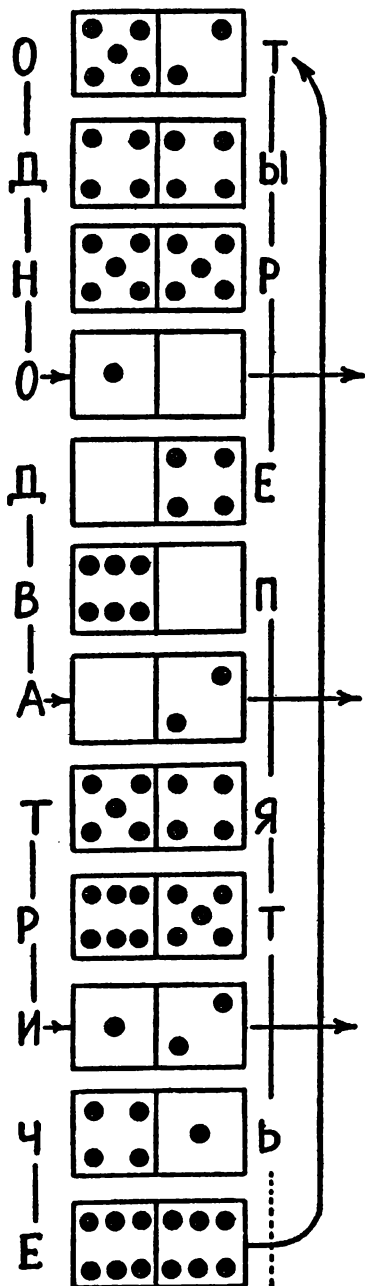
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Обведя кружком число 7 и вычеркнув столбец с этим числом, мы как бы заменяем число 2 первой строки числом, на 5 большим. Обведя число 14 (как на рисунке), мы заменяем 4 числом, на 10 большим. Обведя 16, заменяем 1 числом, на 15 большим. Обведя 23, заменяем 3 числом, на 20 большим. (Улавливаете закономерность?) Так и образуется

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

сумма чисел, обведенных кружками, равная $15 + (5 + 10 + 15 + 20) = 65$.

А требование увеличить каждое слагаемое на назначаемое нами число m — не более, чем камуфляж, чтобы при повторении фокуса (или у всех участников) не получалась одна и та же «угадываемая» сумма.

Для таблицы из n^2 чисел сумма чисел первой строки $\frac{(1+n)n}{2}$. При замене чисел первой строки числами в кружках происходит прирост, равный $n + 2n + 3n \dots + (n-1)n = \frac{n^2(n-1)}{2}$. Сумма (S) обведенных чисел равна

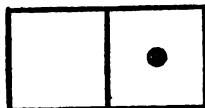


$$\frac{(1+n)n^2}{2} + \frac{n^2(n-1)}{2} = \frac{(1+n^2)n}{2}.$$

При $n = 5$ $S = 65$, при $n = 6$ $S = 111$.

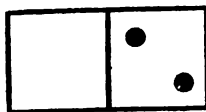
СЕКРЕТ СИСТЕМЫ РАСКЛАДКИ

Секрет угадывания прост — по количеству букв в словах: ОДНО (очко) — 4 буквы, ДВА (очка) — 3 буквы, ТРИ — 3 буквы и т.д. Программа действий: трогаю первую плитку — мыслю букву «О», трогаю вторую плитку — мыслю букву «Д», третью — мыслю «Н», четвертую — «О» — открываю:



и отбрасываю. Трогаю пятую

(теперь она — четвертая) — мыслю «Д», следующую плитку соотношу с буквой «В», еще следующую — с «А» — последней буквой слова ДВА, открываю плитку:



и отбрасываю. Продолжая процесс угадывания, соот-

ношу отсчет плиток со словами ТРИ, ЧЕТЫРЕ, ПЯТЬ и т.д. (по количеству последней плитки домино. Схема начальных действий показана на рисунке (с. 62).

МУЖЕСТВЕННЫЕ — НАЛЕВО, ЖЕНСТВЕННЫЕ — НАПРАВО

$$1. 79\frac{1}{3} + 5 = 84 + \frac{2}{6}; \quad 519 + 7^3 = 864 - 2.$$

$$2. \begin{aligned} 3 + 5 - 7 + 9 : 1 &= 2 \cdot 4 + 8 - 6, \\ 3 + 5 + 7 - 9 : 1 &= 8 : 2 - 4 + 6. \end{aligned}$$

«ДА ХОТЬ КОГО СМУТЯТ ВОПРОСЫ БЫСТРЫЕ»

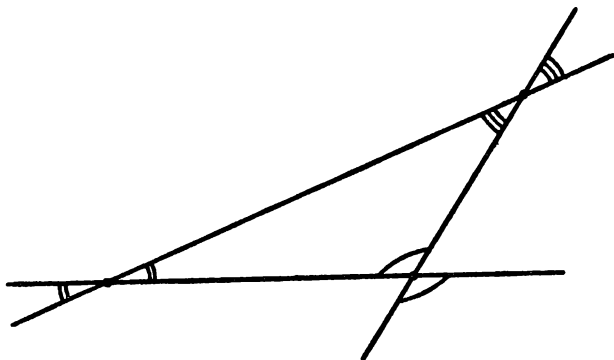
1. Сумма больше. Сумма всех неотрицательных чисел, включая нуль, положительна, а произведение положительных чисел и нуля равно нулю.

2. Лупа не увеличивает углы, так как величина угла не зависит от длины его сторон.

3. Тень от башни.

4. Пятый удар часов отделен от первого четырьмя паузами. Каждая пауза длится $20 : 4 = 5$ с. Десятый удар отделен от первого девятью паузами, следовательно, 10 ударов часы отобьют за $9 \cdot 5 = 45$ с.

5. Продолжить стороны треугольника за вершины:



6. 50 раз кладем гири парами: 1 г — на левую чашку весов, 2 г — на правую и т.д. поочередно. Каждая такая пара гирь дает превышение на правой чашке весов на 1 г. Следовательно, полное превышение массы — 50 г.

7. Очевидно, что цифрой 5.

8. Таковым является любое положительное число, меньшее единицы. Например, $\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

9. Площадь уменьшилась на 25 кв. ед.

10. В букву «О» вписать: а) 7 или 17, будет 8 (в О семь) или 18 (в О семнадцать); б) 70, будет 80 (в О семьдесят); в) 700, будет 800 (в О семьсот).

11. Из четырех нулей можно соорудить число 88 — возраст автора книги за 5 лет до первого года XXI века, либо — пару знаков бесконечности, из которых формируется математический символ ∞ , выражающий «неопределенность».

Знак деления между цифрами числа 88 преобразует 88 в единицу (8 : 8).

12. Тот, кто смотрит на эту картинку, и есть третий.

13. Для нуля.

14. Согнуть пополам и еще раз пополам, образовавшуюся одну четвертинку всей ленты отрезать. Оставшаяся часть будет иметь длину $\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3} : 4\right) = \frac{1}{2}$ м.





ГЛАВЕРЯ
СЮЗОК,
ФАНТАЗИИ...

Горят причудливо краски
И, как ни мудра голова,
Вы все-таки верьте сказке —
Сказка всегда права!

Э. Асадов

«Математика вездесуща, она присутствует даже в сказках!» — утверждает Джанни Родари, в частности и двумя своими веселыми сказками-«говорушками»: «Как придумывают числа» и «Приключения пятерки».

КАК ПРИДУМЫВАЮТ ЧИСЛА

- Давайте придумывать числа?!
- Чур, я первый! Почти-один, почти-два, почти-три, почти-четыре, почти-пять, почти-шесть.
- Это слишком маленькие числа. Послушай мои. Один сверхмиллион биллионов! Одна восьмища миллионщиц! Один удиви-удивятище и один изумилище!
- Подумаешь! А я могу целую таблицу умножения придумать! Вот смотри!

Трижды один — Паолина и Мартин!
Трижды два — вкусная халва!
Трижды три — нос скорей утри!
Трижды четыре — шоколад, вкуснейший в мире!
Трижды пять — ошибся опять!
Трижды шесть — я хочу есть!
Трижды семь — никогда суп не ем!
Трижды восемь — милости просим!
Трижды девять — мир слезам не верит!
Трижды десять — ничего не весят!

- Скажи-ка быстро, сколько стоит эта коврижка?
- Дважды «надеру-уши»!
- А сколько отсюда до Милана?
- Тысяча километров новых, один километр совсем уж старый, и семь шоколадок.
- Сколько весит слеза?
- А это по-разному. Слеза капризного мальчика весит меньше ветра. Слеза голодного мальчика — тяжелее всей Земли!
- Очень длинная получилась сказка?
- Слишком!
- Давай напоследок придумаем еще несколько чисел. Знаешь как считают в Медоне? Раз — и — раз, двас — и — двас, трижды — трижки, четыре коврижки и пяток кочерыжек.
- А я посчитаю, как в Риме. Разик, двазик, третий тазик, а дальше считай как знаешь...

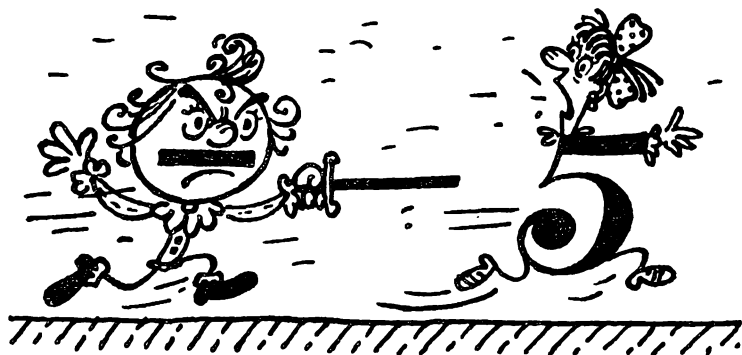
* * *

А вот цифры и придумывать не надо — они есть, и всего их 10, а могут выразить любое число.

И забрались однажды в сказку эту 5 четырехзначных чисел вместе с их суммой, но в записи чисел какая-то одна цифра замаскировалась буквой *x*.

«Маска, кто ты?» — какая цифра? Сообразите!

$$\begin{array}{r}
 1\ 2\ x\ 8 \\
 2\ x\ 1\ x \\
 +\ x\ 5\ x\ 3 \\
 7\ x\ 9\ x \\
 \hline
 x\ 1\ 7\ 8 \\
 \hline
 2\ 4\ 3\ 2\ 1
 \end{array}$$



ПРИКЛЮЧЕНИЯ ПЯТЕРКИ

— На помощь! На помощь! — кричит, убегая, бедняжка Пятерка.

— Что с тобой? Что случилось?

— Разве не видите? За мной гонится Вычитание! Беда, если догонит!

— Скажешь тоже, беда!

Но беда случилась. Вычитание настигло Пятерку и стало кромсать ее своей острейшей шпагой — знаком «минус». Ну и досталось же нашей Пятерке... Но тут, по счастью, мимо проезжала длинная заграничная машина — вот такая длинная! Вычитание отвернулось на секунду, чтобы по-



смотреть, нельзя ли ее укоротить немного, и Пятерка мигом скрылась в подъезде. Только это была уже не Пятерка, а Четверка, и вдобавок с разбитым носом.

— Бедняжка, что с тобой? Ты подралась с кем-нибудь?

Боже правый! Спасайся кто может! Какой медовый голосок! Конечно, это Деление собственной персоной. Несчастливая Четверка еле слышно прошептала: «Добрый вечер!» — и попыталась шмыгнуть в сторону; но Деление оказалось гораздо ловчее и одним взмахом ножниц — вжик! — разделило четверку пополам: Двойка и Двойка. Одну Двойку оно спрятало в карман, а другая, улучив момент, выбежала на улицу и вскочила в трамвай.

— Еще минуту назад я была Пятеркой! — плакала Двойка. — А теперь, смотрите, во что я превратилась!

Вагоновожатый проворчал в ответ:

— Некоторые люди сами должны понимать, что им лучше ходить пешком, а не ездить в трамвае.

— Но это же не моя вина! Я тут ни при чем! Я же не виновата! — краснея воскликнула Двойка.

— Да, конечно, дядя виноват! Так все говорят.

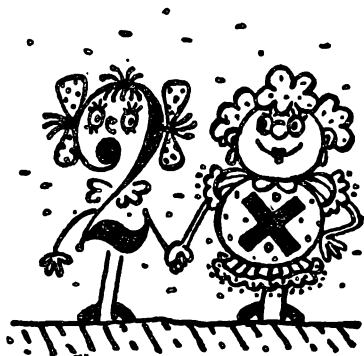
Двойка вышла на первой же остановке, пунцовая, как обивка на кресле. И тут ей опять не повезло: она отдала кому-то ногу.

— Ах, простите, пожалуйста, синьора!

Но синьора, оказывается, несколько не рассердилась. Напротив, она даже улыбнулась.

Смотри-ка, да ведь это синьора Умножение! У нее очень доброе сердце, и она очень жалеет людей, когда те попадают в беду, — она тут же умножила Двойку на три, и вот уже перед нами великолепная цифра — Шестерка. Почему великолепная? Да это же Пять с плюсом!

Ни один учитель никогда не напишет шесть, а припишет к Пятерке плюс.



— Ура! Теперь я Пять с плюсом! И меня обязательно переведут в следующий класс.

А что же стало с той Двойкой, которую Деление спрятало в карман?

Сказка умалчивает, но очевидцы рассказывают:

«Двойка ловко выскользнула из кармана Деления, подбежала к отряду цифр 1 2 3 4 5, гуськом стоявших у входа в Дом сказок, и, расставив знаки арифметических действий (+, —, ×, :) и скобки между цифрами, не переставляя их, преобразовала весь этот отряд цифр в такую же Двойку как сама».

Кто захочет воспроизвести в своей тетради этот трюк с цифрами 1 2 3 4 5, пусть найдет не меньше, чем 4 варианта решения.



**И ДНЕМ И НОЧЬЮ КОТ УЧЕНЫЙ
ВСЕ ХОДИТ ПО ЦЕПИ КРУТОМ...**

Сказочный Кот Котофеич — сосед Бабы Яги. Когда в избушке Бабы Яги завелись мыши, она уговорила соседа каждую ночь ловить этих мышек.

— За хорошую работу, — заявила Баба Яга, — ты будешь получать каждое утро по три вкусных пирожка для своих котят. А если какую-то ночь проспишь на мягком коврике — с тебя будет причитаться один пирожок.

26 ночей был Кот Котофеич на службе у Бабы Яги. Иной раз сладко спал всю ночь у печки. Своим котяткам он все же принес 62 пирожка. Сколько ночей Кот Котофеич добросовестно ловил мышей и сколько ночей проспал?

ПОМОЖЕМ ЗОЛУШКЕ

Сказочные короли, черти, бабы-яги и прочие злодеи неистощимы в придумывании разнообразных преград и препятствий на дорогах, ведущих к счастью. Герою приходится проявлять находчивость и храбрость, выбирать на перекрестке лучшую из трех дорог, строить дворцы за одну ночь, улаживать закоренелые конфликты, быть арбитром в спорах, искать наилучшие решения хитроумных загадок и задач, подчас действительно нелепых и из-за этого кажущихся неразрешимыми.

Так случилось и в этой сказке.

— Мы пойдем на бал — сказала Золушке мачеха и злорадно добавила:

— Оставляю тебе бочонок с виноградным соком, 24 литра, и три пустые круглые открытые банки (без делений) вместимостью 10, 11 и 13 литров. Не пользуясь никакими мерками ты должна влить из бочонка в каждую банку ровно по 8 литров сока. Когда вернемся с бала — я проверю.

— Впрочем, можешь прийти посмотреть как мы танцуем, если быстро и достаточно аккуратно выполнишь задание.

Юноши, девушки, неужели мы оставим Золушку без поддержки? Она очень сообразительная девушка, но вряд ли училась в школе, а на фею теперь надежда плохая.



ПРОДОЛЖЕНИЕ СКАЗКИ

Остроумный выход из затруднительного положения радует, восхищает любого человека с чистым сердцем и ясным взглядом. Совсем другая реакция у бюрократа или злобствующего обывателя.

Не похвалила и не поблагодарила мачеха ни Золушку за точное выполнение задания, ни нас за дружескую выручку Золушки, слила весь сок обратно в бочонок и потребовала вновь разлить эти же 24 л сока в три неодинаковые посуды так, чтобы в каждой оказалось по 8 л. Одну открытую круглую банку в 11 л она оставила, а другие две заменила тоже круглыми банками такой же вместимости в 10 и 13 л, но сделанными из легкого, непрозрачного материала. Эти две банки были наглухо закрыты крышками, в которых имелись лишь небольшие отверстия.

Итак, друзья, Золушка вновь оказалась в трудном положении. Ищите выход!

ВОТ ТАК ГОСТИ!

В гости к Каркуше пришли Филя, Хрюша и Степашка. Хрюша сразу заметил на столе вазу с аппетитными шоколадными шариками. Пока Каркуша хлопотала на кухне, он подобрался к вазе и бесцеремонно съел половину всех шариков и еще один. Довольный и совсем не обеспокоенный тем, что поступил не по-товарищески, Хрюша отошел от стола. И присоединился к Степашке, разглядывавшему картинки в книжке.

Тем временем и Филя, увидев конфетки, полакомился половиной оставшихся в вазе шариков. Подумав немного, прихватил еще один шарик. Так же поступил и Степашка: тоже съел половину оставшихся в вазе шариков и еще один.

Тут появилась из кухни Каркуша, подлетела к вазе и склевала половину лежащих на дне вазы шариков и еще один, после чего в вазе не осталось ни одного шарика! Сколько шоколадных шариков было в вазе первоначально?



ТРИ ДЕВИЦЫ ПОД ОКНОМ...

Пряли поздно вечерком: Даша, Маша и Палаша. Одна в красном платье, другая в синем, третья в белом.

На другой день и спрашивает их сватья баба Бабариха: «А скажите, красавицы, какого цвета платье было на каждой из вас?»

Одна ответила: «На Маше — красное».

Другая: «На Даше было не красное платье».

Третья: «На Палаше — не синее».

Только одна из них сказала правду, а двое слукавили — солгали. Какова же истина?

В КОТОРОМ ЧАСУ ЛОЖИЛСЯ СПАТЬ ОНЕГИН?

Эта деталь в описании деревенской жизни Онегина, по-видимому, не интересовала А.С. Пушкина. Однако, некоторые «не дошедшие до нас» сведения позволяют точно ответить на поставленный вопрос.

Несомненно у Онегина были карманные часы. Он имел обыкновение заводить их до отказа 2 раза в день: утром в 9.30 и ночью, ложась спать. Утром приходилось делать 11 полных оборотов головки часов, а ночью — 9. Этих сведений достаточно, чтобы вычислить, в котором же часу ложился спать Онегин?



КОВАРНАЯ ПРИНЦЕССА

— Задаю тебе последнюю задачу, — сказала принцесса Иванушке, — найди единственно верный путь из этой комнаты в наш зимний сад и сорви для меня самую красивую розу. Из этой комнаты ты пройдешь через левую, или правую, или среднюю дверь во вторую комнату; такие же три вида дверей будут перед тобой при переходе из второй комнаты в третью и из третьей — в сад.

— Учти мои советы, — продолжала принцесса, — первый: из этого зала пройди через правую дверь; второй: из второй комнаты — не через правую дверь, и третий совет: из третьей — не через левую дверь.

Иванушка знал, что обычно из трех советов принцессы ровно два указывают ложное направление, кроме того, служанка принцессы успела шепнуть ему, что надо обязательно пройти через дверь каждого вида по одному разу.

Как и полагается в сказке, принес Иванушка розу и был вознагражден. Какой же маршрут оказался единственно верным?

КАК ПОБЕДИЛ ИВАН-ЦАРЕВИЧ ЗМЕЯ ГОРЫНЫЧА

Подробности об этом подвиге поведал мне коллега Лихтарников Л.М. из Новгорода, как будто сам присутствовал на поле боя Ивана-царевича с трехглавым и треххвостым Змеем Горынычем.

— Вот тебе меч-складенец,— говорит царевичу Баба-Яга.
— Одним ударом ты можешь отрубить либо одну голову, либо две головы, либо один хвост, либо два хвоста. Запомни: срубишь голову — новая вырастет, срубишь хвост — два новых вырастут, срубишь два хвоста — голова вырастет, срубишь две головы — ничего не вырастет...

Сколько ударов нанес Змею Иван-царевич пока срубил ему все головы и все хвосты?



КАК МУЖИК ГУСЕЙ ДЕЛИЛ

«... Услыхал богатый мужик, что барин за гуся наградила бедного мужика хлебом и деньгами, зажарил 5 гусей и понес к барину. Барин говорит: “Спасибо за гусей. Да вот у меня жена, два сына, две дочери, всех шестеро — как бы нам поровну разделить твоих гусей?”

Стал богатый мужик думать и ничего не придумал.

Послал барин за бедным мужиком и велел делить. Бедный мужик взял одного гуся — дал барину с барыней и говорит...» (Что говорит?)

Кто не помнит продолжения этой сказки Льва Николаевича Толстого, пусть проявит собственную смекалку для такого разделения на шестерых поровну пяти гусей, без разрезания их на части, результатом которого, как случилось и в сказке, и барин был бы доволен и сам мужик не остался бы, как говорится, в накладе.

Конец сказки таков: «Барин посмеялся и дал бедному мужику еще денег и хлеба, а богатого прогнал».

НЕ ПО СВОИМ МЕСТАМ

По сказке Льва Николаевича Толстого, девочка, заблудившаяся в лесу, пришла к домику, в котором жили три медведя. «Девочка вошла в столовую и увидела на столе 3 чашки с похлебкой...

Подле каждой чашки лежала ложка: большая, средняя и маленькая. Девочка взяла самую большую ложку и похлебала из самой большой чашки, потом взяла среднюю ложку и похлебала из средней чашки, потом взяла маленькую ложечку и похлебала из синенькой (Мишуткиной) чашечки». Получилось полное соответствие между размерами чашек (Б, С, М) и ложек (б, с, м).

При чтении этой прелестной сказки — «Три медведя» — всякий раз в моем воображении возникал еще один, не описанный автором сказки, эпизод:

Ложки, которыми кушала девочка, она вымыла и хотела положить их на «свои» места, но, взглянув в окно, увидела приближающихся к дому медведей и второпях положила все три ложки не на «свои» места: большую ложку не к большой чашке, среднюю ложку не к средней чашке и маленькую ложку не к маленькой чашечке.

Мы легко установим, что возможны лишь два варианта размещения ложек трех неодинаковых размеров «не по своим местам»:

Расположение чашек на столе:	Б С М
Возможное расположение ложек: или:	с м б м б с

Если бы в домике медведей на столе было не 3, а 4 неодинаковых чашки и «подле каждой чашки лежала ложка», соответствующая размеру чашки, то возможных вариантов размещения ложек четырех размеров «не по своим местам» оказалось бы больше двух, но меньше десяти. Сколько же точно?

ЧАШКИ-ЛОЖКИ ДЛЯ n МЕДВЕДЕЙ

Фактическое осуществление всех возможных вариантов размещения n неодинаковых ложек так, чтобы ни одна не оказалась на столе подле «своей» чашки, становится монотонно-скучным занятием по мере увеличения семейства медведей, живущих в сказке Льва Николаевича Толстого (см. предыдущую миниатюру).

При $n = 3$ у нас легко образовались 2 возможных варианта, при $n = 4$ число вариантов немного не достигло 10.

При $n = 5$, если не пропустите ни одного возможного варианта, это число возрастет до ... Впрочем, определяйте собственными комбинаторными усилиями искомое число (P) возможных размещений n неодинаковых предметов «не по своим местам», затем проверяйте правильность достигнутого результата подсчетом по формуле

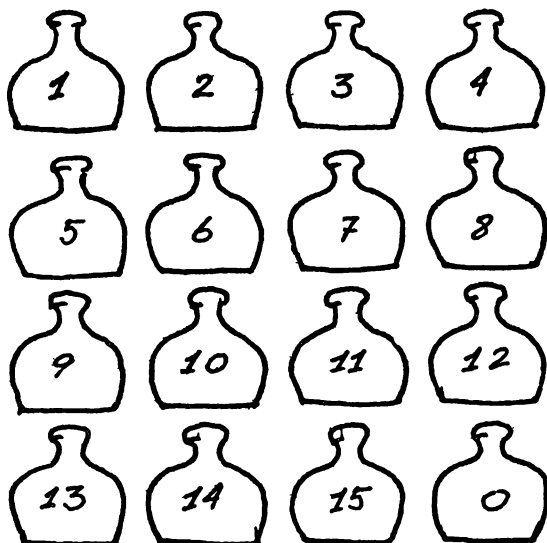
$$P = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right),$$

справедливой для всякого натурального n
($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$).

ЛЕГЕНДА О МАГИЧЕСКОМ КВАДРАТЕ ФРАНКЛИНА

Бенджамин Франклин был большим любителем головоломок, часть которых придумывал сам.

Однажды, находясь в компании, расположившейся за круглым столом, Франклин, отозвавшись на просьбу собравшихся придумать новую головоломку, взял с соседнего столика шестнадцать пустых бутылочек, написал на этикетках порядковые числа от 1 до 15 и на последней бутылочке 0. Расставил их в форме квадрата, как показано на рисунке, и сказал: «Предлагаю разместить все бутылочки заново так, чтобы из чисел на этикетках образовался магический квадрат с суммой, равной 30 вдоль каждой из четырех строк, каждого из четырех столбцов и вдоль обеих диагоналей квадрата. Но вы не должны перемещать более



чем десять бутылочек, какие-то шесть должны остаться там, где поставлены. Последнее требование — некоторый трюк — для придания головоломке дополнительной утонченности».

Как нужно переставить бутылочки и в чем заключается суть трюка, о котором говорил Франклин?

ПРОДЕЛКИ ЧЕРТА ПОД РОЖДЕСТВО

Мифический бес во времена Гоголя частенько вмешивался в людские дела, особенно рьяно в канун Рождества Христова.

Однажды в ту пору этот неутомимый бес попутал даже кассира магазина. Давая сдачу студенту, купившему елочные украшения и подарки, кассир выдал покупателю рубли в таком количестве, в каком следовало выдать копейки, а копейки — в таком количестве, в каком следовало выдать рубли. Студент торопился, не проверяя положил в карман полученную сдачу и вышел из магазина.

Израсходовав 5 копеек на покупку газеты, студент тут же сразу обнаружил, что у него осталось денег вдвое больше того количества, которое он должен был получить от кассира (других денег, кроме полученных, он не имел ни копейки). Студент, разумеется, вернулся в магазин и отдал кассиру обнаруженный излишек денег.

Установите, сколько стоили в те времена елочные украшения и подарки, купленные студентом.

ЧЕРТ О СТУДЕНТЕ

Черт, не скрывая своей антипатии к честному студенту (см. предыдущую миниатюру), все же решил рассказать нам кое-что о нем и его семье, но из вредности избрал запутывающую форму изложения, — нечто, похожее на кроссворд (с. 80), где свободные клетки надо заполнить не словами, а числами.

По горизонтали:

1. Простое число. Если цифры поменять местами, то опять будет простое число.
3. Возраст его отца, когда самому студенту было 11 лет.
5. Год его рождения.
7. См. № 1 по горизонтали.
9. $\frac{2}{5}$ возраста его отца (в настоящее время).
12. Квадрат возраста отца (четырёхзначное число).
14. Число всех пар (x, y) решений в целых числах уравнения $x^2 + y^2 = 65$. Подскажу, что все целые числа, удовлетворяющие этому уравнению, однозначные.
15. Сумма цифр числа № 5 по горизонтали.



	1	2		3	4
5			6		
7					
		8		9	10
11		12	13		
14			15		

По вертикали (сверху вниз):

1. Расстояние в километрах по железной дороге от Москвы до большого приволжского города, в котором жил. Какой это город?
2. Удвоенный возраст его младшей сестры.
4. Число, обратное числу № 10 по вертикали.
5. Возраст его младшей сестры.
6. Номер первой буквы его имени в русском алфавите, если считать «и» девятой буквой, «к» десятой. На 3 единицы больше номера второй буквы его имени.

8. Квадратное число. Цифры этого числа являются номерами двух последних букв его имени, состоящего из 4 букв. Установите его имя.

9. Квадрат числа № 15 по горизонтали.

10. Число, которое уменьшается на 9 при обмене местами его цифр.

11. Размер ботинок, которые он носит.

13. Его возраст.

«ГОРОД СТАР, ГОРОД СЕД, ГОРОДУ 1140 ЛЕТ»

А. Мартынов

В одном фантастическом рассказе утверждается, что один из древних городов был расположен на десяти островах. Далее сказано: «С пяти островов переброшено на материк по одному мосту. На четырех островах берут начало по 4 моста, на трех островах берут начало по 3 моста и на один остров можно пройти только по одному мосту».

Как надо рассуждать для доказательства, что описание математически ошибочное?

СКАЗКА О ЛЖЕЦАХ И ПРАВДОЛЮБЦАХ

Города Правдинск и Лгунск очень похожи один на другой и расположены рядом. Естественно, поэтому, что жители Правдинска бывают в Лгунске, а на улицах Лгунска легко встретить жителя Правдинска.

Турист забрел в один из этих городов, но не знал, в какой именно, а узнать было нужно. Очевидно, надо спросить об этом кого-нибудь из прохожих. Но как сформулировать вопрос? Дело в том, что туристу была известна уникальная особенность жителей этих городов: жители Правдинска никогда не лгут, а жители Лгунска лгут всегда... Следовательно, бесполезно задавать прохожему прямой вопрос:

«Как называется этот город?», так как осталось бы неясным — ответ спрошенного правда или ложь?

Как турист сформулировал свой единственный вопрос, если известно, что прохожий ответил «нет» и этот ответ оказался достаточным для выяснения в каком из двух городов оказался турист?

БАЗАРНАЯ ЛОГИКА

На шумном, восточном базаре три продавца — молодой, старый и средних лет — продавали ожерелья двух разных стоимостей. Каждый торговал ожерельями одного из этих двух видов.

Подошел к ним Кот — тот самый, что в сапогах — и задал каждому из продавцов по одному вопросу:

— Дороже ли ожерелье самого пожилого из вас, чем ожерелье, продаваемое самым молодым?

— Дороже ли ожерелье продавца средних лет, чем ожерелье, продаваемое самым пожилым из вас?

— Уступишь мне немного, тогда я куплю сразу два ожерелья для своей Кошечки?

На все вопросы Кот получал один и тот же ответ.

Купил ли Кот в сапогах выбранные им два ожерелья?



ФАНТАСТИКА В ДВУХ ЭПИЗОДАХ

Первый.

«Машина времени» перенесла меня в III век до н.э. к Евклиду. И я спросил его: «О, великий грек, изумительно красиво доказавший, что простых чисел бесконечно много, сколько же среди них «близнецов-тройняшек», то есть таких, как (3, 5, 7) — трех последовательных нечетных чисел, каждое из которых простое?»

— Других «тройняшек» такого вида, кроме (3, 5, 7) нет на множестве простых чисел, — ответил Евклид.

— Как же это доказать?

— Предположим, что существуют «тройняшки» вида $(p, p+2, p+4)$, где $p \neq 3$, но тогда $p+2$, либо $p+4$ делится на 3 без остатка.

Непременно убедись!

Второй.

К берегу реки подошли 5 зайцев, а к противоположному берегу — 5 волков. Тем и другим необходимо переправиться через реку. На том берегу, где волки, есть трехместная лодка и одно весло. Грести веслом умеют только один волк и только один заяц.

Если волков не будет больше, чем зайцев ни на берегу, ни в лодке, то волки не нападут на зайцев.

Как при этих условиях осуществить переправу благополучно?



КТО ПЕРВЫЙ СКАЗАЛ «Э!»

После окончания спектакля «Ревизор» Бобчинский и Добчинский начали препираться по поводу того, кто первый сказал «Э!»

Бобчинский. Это Вы, Петр Иванович, первый сказали «Э!» (1). Вы сами так раньше говорили (2).

Добчинский. Нет, Петр Иванович, я так не говорил (3). Это Вы семгу первый заказали (4). Вы и сказали «Э!» (5). А у меня зуб во рту со свистом (6).

Бобчинский. Что я семгу первый заказал, это верно (7). И верно, что у Вас зуб со свистом (8). Но все-таки это Вы первый сказали «Э!» (9).

Выясните, мог ли Бобчинский первым сказать «Э!», если известно, что из девяти произнесенных в этом разговоре фраз-утверждений нечетное число верных.

Ответа на этот вопрос нет и в книге «Заочные математические олимпиады». М., 1981, откуда поступила к нам эта миниатюра о воображаемом продолжении спора между Бобчинским и Добчинским.

Рассудите, кто же из них мог первым сказать «Э!».



ЛУНА ЗАГРУСТИЛА НАПРАСНО, ИЛИ ФОРМУЛА ФУТБОЛЬНОГО МЯЧА

— Как ты оказался один на футбольном поле?

Именно этот вопрос уловил Мяч в голубоватом потоке осветивших его лучей лунного света.

— Я нарочно вывалился из сетки, в которой уносили с поля меня и моих единокожих братьев после окончания тренировки, затянувшейся до ночи.

— Для свидания со мной? — допытывалась волшебница Луна.

— Да, с твоей помощью я хочу проверить справедливость некоторых математических закономерностей, подмеченных мною в часы скитаний по зеленому полю и за его границей.

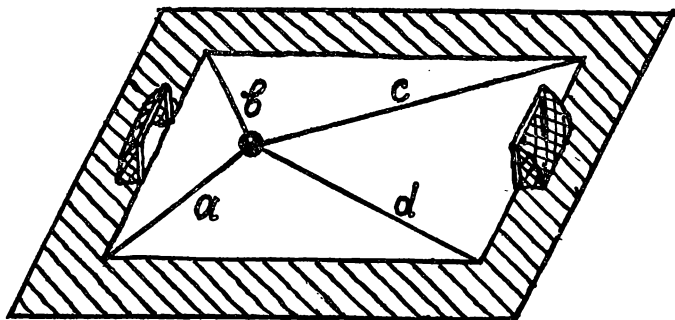
— Например?

— Я установил, что сумма квадратов расстояний от точки, в которой я сейчас касаюсь плоского прямоугольного поля, до двух диагонально-противоположных вершин углов поля (см. рис.) точно равна сумме квадратов расстояний от той же точки до двух других вершин углов поля (тебе, наверно, приходилось наблюдать штрафные угловые удары?). Прошу тебя, поручи своему Лучу промерить расстояния.

— Пожалуйста.

Подсчеты, выполненные Мячом и Лучом, подтвердили:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$



— Ну и что же, — усмехнулась Луна и продолжала задорно, — перебросят тебя с этого места на другое, вот и пропало равенство, открытием которого ты так гордишься.

— Нет, Луна, дело совсем не в том, что я в данный момент прикасаюсь к какой-то особенной точке поля. Равенство $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ подтвердится для любого места, где бы я не находился: на поле, на границе, в сетке ворот, или даже в «ауте» (за пределами поля). Хочешь я перекачусь на другую точку поля и мы еще один промер сделаем?

— Промерами ты меня не убедишь. Вот, если бы это доказал кто-нибудь в общем виде...

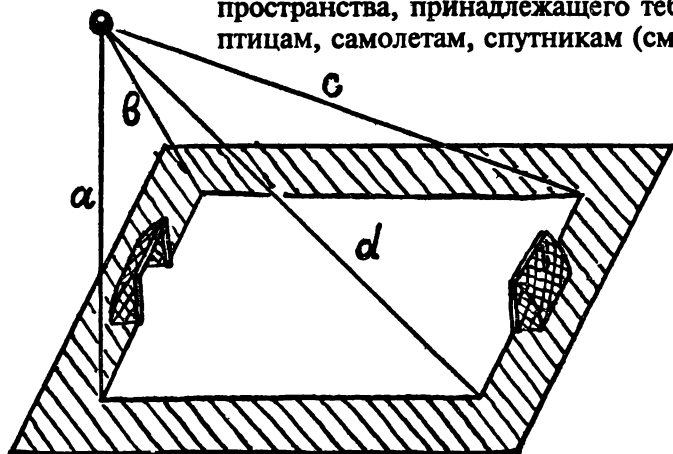
— Болельщики-школьники докажут, — собрался крикнуть Мяч во всю мощь своих круглых упругих легких, но только подумал, а крикнуть не успел: кто-то схватил его в охапку и унес — должно быть все-таки обнаружили его исчезновение из сетки.

Облако грусти закрыло Луну... Неуютным показалось небесное жизненное пространство.

— Не унывай, Лунатик, — ласково прошептал ей откуда-то налетевший Ветерок. — Пусть не зазнаются всякие там футбольные мячи и земные точки. Равенство

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

справедливо не только для всех точек плоскости, в которой расположено футбольное поле, но также и для всех точек пространства, принадлежащего тебе, мне, птицам, самолетам, спутникам (см. рис.).



Конечно, Ветер всюду бывает, многое видит и вероятно все знает. Но мы больше доверяем законам Геометрии и доводам Разума. Подтверждают ли они формулу Мяча и утверждение Ветра?

НУ, ЗАЯЦ, ПОГОДИ!

Заяц уговорился с волком: оба одновременно выбегут из вершины A квадрата $ABCD$ и будут бегать не останавливаясь с одинаковой постоянной скоростью. Заяц — по сторонам квадрата без изменения выбранного направления, а волк — по диагонали AC туда-обратно, не задерживаясь в вершинах A и C . Волк схватит зайца в тот момент, когда оба они окажутся в одной из вершин квадрата A или C . Заяц математику не изучал и потому лишь интуитивно убежден, что такой момент не наступит никогда. Если вы думаете так же, то объясните это научно одной фразой.

ОХ, ЭТИ ДРОБИ!

Ох, эти дроби!
Жизнь, как дробь,
И точна, а — мимо...

И. Снегова

Двенадцатилетняя Софа («Принцесса науки», великая русская женщина-математик С.В. Ковалевская) любила арифметику, но не стала бы непосредственно перемножать 50 дробей

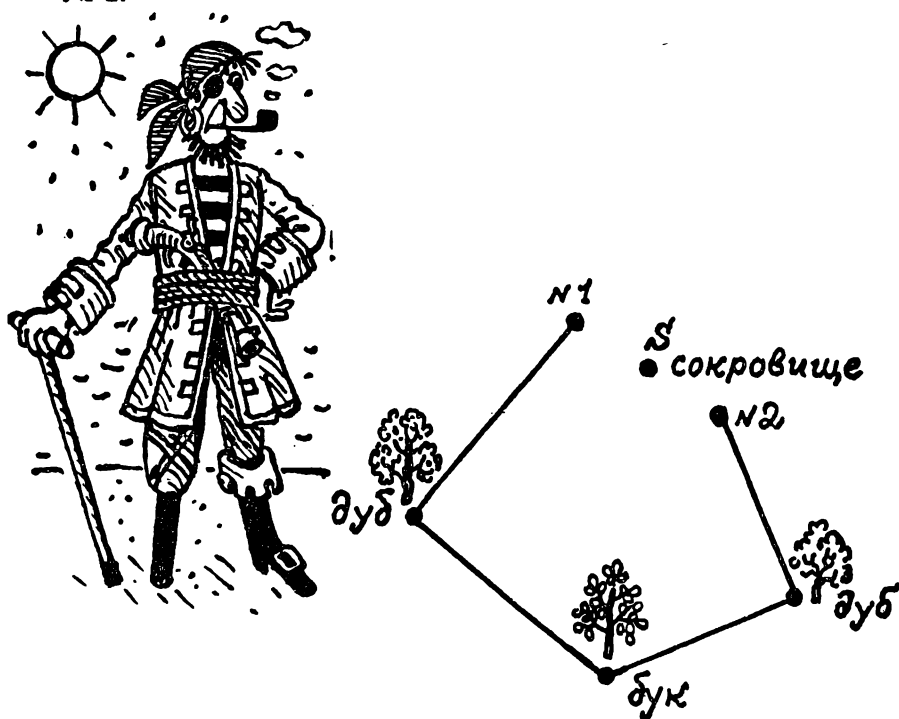
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdot \dots \cdot \frac{97}{98} \cdot \frac{99}{100},$$

чтобы выяснить: больше или меньше чем $\frac{1}{10}$ это произведение? И все же на поставленный вопрос ответила бы правильно и обоснованно, а не наугад. Как следовало бы ей действовать?

ПИРАТЫ И ЗАРЫТОЕ СОКРОВИЩЕ

Капитан и два матроса с пиратского корабля торопились спрятать на пустынном острове сундучок с драгоценностями. Единственными ориентирами на острове были три дерева: бук на берегу и поодаль два дуба по разные стороны от бука. Долговязому Джону капитан приказал протянуть веревку от бука к левому дубу, затем повернуть во внутрь участка под прямым углом и сделать столько же шагов, сколько было от бука до дуба. Это — точка № 1. Одновременно второму матросу следовало проделать то же самое относительно бука и правого дуба. Конец пути — точка № 2.

Сундучок закопали на полпути между точками № 1 и № 2.



«О-кей! Забирайте веревки, — скомандовал капитан, — мы покидаем остров, а за сокровищем вернемся через год».

Но долговязый Джон решил единолично завладеть сокровищем и вскоре ему, в сопровождении приятеля-юнга, удалось, тайком от капитана, вновь пробраться на этот остров. И, что же он увидел? Дубы на месте, а бука нет. По-видимому штормом выдрало его и унесло в океан. Никаких следов не осталось от бука. Пригорюнился Джон. Но — вот удача! Юнга оказался весьма толковым и сообразительным парнем. «Не огорчайся, Джон, — сказал юнга, — я найду ваше сокровище и без бука».

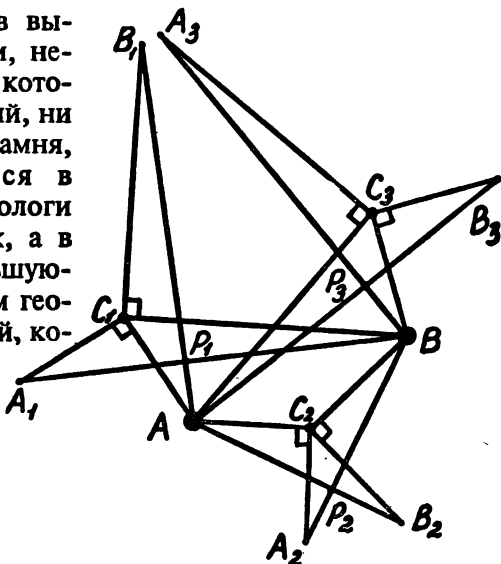
И он это сделал. Как?

ДРУГОЙ ВАРИАНТ СКАЗКИ О СОКРОВИЩЕ

Экспедиция геологов высадилась на пустынном, необитаемом острове, на котором не было ни строений, ни деревьев, только два камня, прочно укрепившиеся в земле. Под одним геологи нашли железный ящик, а в ящичке хорошо сохранившуюся записку с описанием геометрических построений, которые еще в прошлом веке выполнял пират, чтобы по-надежнее укрыть в земле острова свое сокровище.

Пират был, видимо, хорошим геометром.

Воспроизведите в тетради его построения, следуя такому описанию. Пусть точки A и B — местоположение камней, C_1, C_2, C_3 — три пальмы (теперь их нет на острове). Постройте точку A_1 так, чтобы $A_1C_1 = AC_1$ и $\angle AC_1A_1 = 90^\circ$, точку B_1 так, чтобы $B_1C_1 = BC_1$ и $\angle BC_1B_1 = 90^\circ$ (см. рис.).



При этом направление луча C_1A_1 выбрать таким, чтобы пересеклись отрезки (а не их продолжения) A_1B и AB_1 . Пусть P_1 — точка пересечения этих отрезков. Аналогичным построением (только с использованием соответственно палм C_2 и C_3) надо получить точки P_2 и P_3 . Клад находится в центре окружности, проведенной через точки P_1 , P_2 и P_3 .

Палм на острове уже не было, и все же геологи нашли то место, где был зарыт клад. Как?

МАСТЕР, ПРИНЦЕССА И СОЛДАТ

Однажды мастер получил определенное количество жемчужин, чтобы изготовить украшение для принцессы. Обдумывая модель изделия, мастер разложил все жемчужины на 9 неравных кучек так, что образовался магический квадрат 3×3 относительно количеств жемчужин в кучках. Принцесса восхитилась такой моделью украшения (она увлекалась математическими развлечениями), но все-таки выразила недовольство тем, что ни в одной кучке количество жемчужин не является простым числом.

— Дайте мне еще 9 жемчужин, — сказал мастер, — я добавлю по одной к каждой кучке и все числа в магическом квадрате окажутся простыми.

Проверили по таблице простых чисел: точно! Принцесса только было вознамерилась обратиться к хранителю драгоценностей с просьбой добавить мастеру 9 жемчужин, как вдруг осмелился заговорить солдат из дворцовой охраны:

— Поступите, принцесса, иначе: выньте из каждой кучки по одной жемчужине и опять элементами магического квадрата будут простые числа.

Принцесса так и сделала. Солдат оказался прав, и в награду за наблюдательность и математическую находчивость получил эти 9 жемчужин.

Сколько жемчужин было выдано мастеру первоначально?

Указания 1. Вспомните, что магический квадрат из 9 натуральных чисел имеет, например, такой вид:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Если магическая сумма S , то в центральной клетке непременно должно быть число $\frac{S}{3}$. Все пары чисел, расположенные симметрично относительно центральной клетки, являются сопряженными парами, суммы которых одинаковы и дополняют число в центральной клетке до магической суммы S .

2. По условию простые числа получаются как от добавления в каждую клетку по жемчужине, так и после изъятия по одной жемчужине. Это значит, что если один магический квадрат составлен из каких-то простых чисел $\{P_i\}$, то элементами второго должны быть простые числа $\{P_i + 2\}$, то есть так называемые простые числа-близнецы. Такими парами близнецов являются, например, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, и т.д.

3. Из таблицы простых чисел выпишите все пары «близнецов» в промежутке $[10; 300]$ — это наша подсказка. В этом промежутке найдутся 4 сопряженные пары, имеющие одинаковые суммы.

4. Центральный элемент определится как половина суммы сопряженной пары.

Примечание. Энтузиасты-любители числовых курьезов рассмотрели далеко продвинутую таблицу простых чисел-близнецов. Им удалось получить еще и такое решение нашей задачи: если бы мастер получил 45090 жемчужин, то он мог бы предложить такую модель магического квадрата (рис. внизу). Если каждый элемент уменьшить или увеличить на 1, то образуются магические квадраты, состоящие только из простых чисел.

3330	7878	3822
5502	5010	4518
6198	2142	6690

ЕЩЕ ЗАДАЧА

Из какого числа жемчужин мог бы мастер выложить магический квадрат 4×4 , все элементы которого какие-то простые числа, и если каждый элемент увеличить на две единицы, то вновь образуется магический квадрат из простых чисел? Из шестнадцати искомых простых чисел восемь оканчиваются цифрой 9, по четыре — цифрами 7 и 1. (Наименьшее: 29, наибольшее: 1091.)



РЕШЕНИЯ

КАК ПРИДУМЫВАЮТ ЧИСЛА

$$x = 6.$$

ПРИКЛЮЧЕНИЯ ПЯТЕРКИ

Вот 4 варианта решения:

$$\begin{aligned}(1 + 2 + 3 + 4) : 5 &= 2, \\ - (1 \cdot 2 - 3) - 4 + 5 &= 2, \\ (-1 + 2) \cdot 3 + 4 - 5 &= 2, \\ (1 + 2) : 3 - 4 + 5 &= 2\end{aligned}$$

и один сомнительный вариант: $1^2 \cdot 3 + 4 - 5 = 2$
здесь числу 2 позволено подскокить и исполнить роль показателя степени.

И ДНЕМ И НОЧЬЮ КОТ УЧЕНЫЙ ВСЕ ХОДИТ ПО ЦЕПИ КРУГОМ...

Если бы Кот Котофеич занимался ловлей мышей все 26 ночей, он заработал бы $3 \cdot 26 = 78$ пирожков. Разность с тем количеством пирожков, которое он заработал, составляет 16 штук. За каждую ночь, которую кот проспал, он терял 4 пирожка (трех пирожков его лишала хозяйка и один пирожок она взыскивала за безделье). Следовательно, Кот

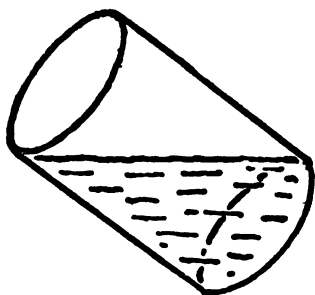
Котофеич отлынивал от ловли мышей $16 : 4 = 4$ ночи, а 22 ночи охотился добросовестно.

Действительно, за 22 ночи Кот Котофеич заработал 66 пирожков. За 4 ночи, которые он проспал, вернул 4 пирожка. Значит, котятam своим он принес 62 вкусных пирожка.

ПОМОЖЕМ ЗОЛУШКЕ

Банки в 10, 11 и 13 литров обозначим цифрами I, II и III. Сначала надо наполнить соком банку III, а из нее отлить 10 л в банку I, тогда в банке III останется 3 л сока.

Теперь надо по л о в и н у содержимого банки I, то есть 5, отлить в банку II. Как это сделать? (Именно в этой операции вся изюминка задачи.) Надо отлить «на глаз» около половины банки, затем, наклонив банку I, посмотреть касается ли плоскость жидкости наклоненного края отверстия банки и приподнятого края дна (как на рисунке).



Отливая или доливая сок можно добиться такого положения. Это и будет означать, что в банке I осталась ровно половина первоначального количества сока, то есть 5 л.

Теперь 13 литров сока распределились так: в банке I — 5 л, в банке II — 5 л и в банке III — 3 л.

Перельем 3 л из банки III в банку II, и первая порция сока готова (8 л в банке II).

Вновь наполняем банку III и отливаем 10 л в банку I. Теперь по л о в и н у содержимого банки I отливаем в бочонек, а к оставшимся 5 л добавляем 3 л из банки III. В результате в банке I образуется вторая порция сока (8 л).

Весь сок, оставшийся в бочонке, выливаем в банку III. Это будет третья порция сока в 8 л.

Мы очень рады, что помогли Золушке, если она сама еще не догадалась поступить так же.

ПРОДОЛЖЕНИЕ СКАЗКИ

Из непрозрачных закрытых банок теперь не отольешь половину содержимого, но выход из положения есть и в этом случае.

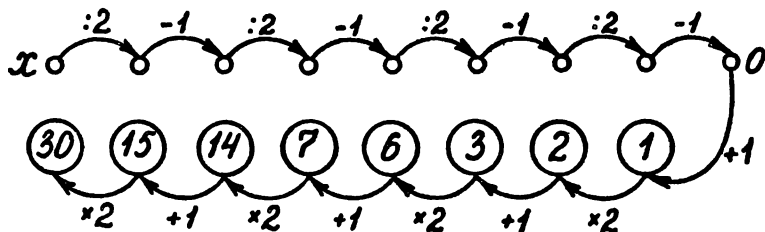
Надо из бочонка наполнить 13-литровую банку; в бочонке останется 11 л. Из 13-литровой банки наполнить 10-литровую, а оставшиеся 3 л вылить в 11-литровую банку. Из 10-литровой банки вылить сок в 13-литровую и дополнить ее тремя литрами из бочонка, в котором было 11 л. После этого в бочонке образуется первая порция в 8 л.

Перелить 3 л сока из 11-литровой банки в 10-литровую и 10-литровую банку вставить в открытую 11-литровую банку. Из 13-литровой банки вливать сок в 11-литровую банку. Помещенная внутрь 10-литровая банка всплывет и так как в ней все же содержится 3 л сока, то вследствие этого в 11-литровую банку вместится только 8 л сока из 13-литровой банки. (Весом и объемом материала 10-литровой банки пренебрегаем.) Это вторая порция в 8 л.

В 13-литровую банку, к оставшимся в ней 5 л сока добавить 3 л, содержащиеся в 10-литровой банке — получится третья порция в 8 л.

ВОТ ТАК ГОСТИ!

Красиво, просто и компактно решается эта задача с помощью системы точек и стрелок:



Верхние стрелки, идущие от x , — схема действий над последовательно съедаемыми шоколадными шариками до получения нуля. Нижние — от нуля — схема обратных действий с записью в кружках промежуточных результатов (как на киноэкране: шедшие вперед теперь пятятся назад).

Ответ: 30.

ТРИ ДЕВИЦЫ ПОД ОКНОМ...

Невозможно сочетание М-к (Маша в красном платье), так как в этом случае оказались бы правдой два ответа: № 1 и № 2. Сочетания М-б, Д-к, П-с означали бы, что все три ответа ложные. Проверьте! Значит, Маша была в синем платье и первый ответ — ложный. Еще один ответ должен быть ложным: второй или третий. Рассмотрев оба варианта, легко получить единственно верный ответ: на Маше было синее платье, на Даше — красное, на Палаше — белое.

В КОТОРОМ ЧАСУ ЛОЖИЛСЯ СПАТЬ ОНЕГИН?



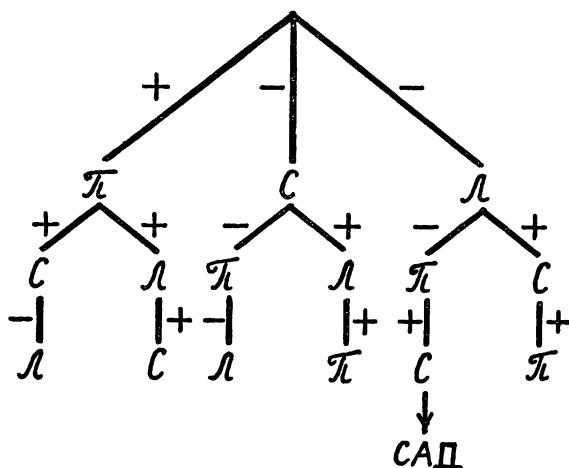
Для суточного завода требовалось $11 + 9 = 20$ полных оборотов головки часов. Промежуток времени x от 9.30 утра до второго завода часов составляет такую же часть суток, какую составляет число 11 от 20. Имеем: $x : 24 = 11 : 20$. Откуда $x = 13$ ч 12 мин. Значит, Онегин ложился спать в

$$9 \text{ ч } 30 \text{ мин} + 13 \text{ ч } 12 \text{ мин} = 22 \text{ ч } 42 \text{ мин},$$

то есть около 11 часов вечера.

КОВАРНАЯ ПРИНЦЕССА

Поскольку на избранном пути не должно быть одинаково расположенных дверей, то есть правой и правой (П и П), или средней и средней (С и С), или левой и левой (Л и Л), то возможно лишь 6 маршрутов (см. рис.). Плюс на соединительном отрезке означает правильный, а минус — ложный совет принцессы. Так как верен только один совет, то правильный маршрут тот, который отмечен одним плюсом и двумя минусами, а именно: Л, П, С — сначала Иванушка прошел через левую дверь, из второй комнаты — через правую, а из третьей — через среднюю дверь.



КАК ПОБЕДИЛ ИВАН-ЦАРЕВИЧ ЗМЕЯ ГОРЫНЫЧА

Девять ударов. Очевидно, что сначала надо 3 раза рубить по одному хвосту — образуется их 6. Теперь 3 раза рубить по 2 хвоста — образуется 3 головы в дополнение к имеющимся трем, и ни одного хвоста не останется у Змея. Наконец, последними тремя ударами снести все 6 голов по две при каждом ударе и у Змея не останется ни голов, ни хвостов.

КАК МУЖИК ГУСЕЙ ДЕЛИЛ

«Бедный мужик взял одного гуся — дал барину с барыней и говорит: “Вот вас трое с гусем”; одного дал сыновьям: “И вас, говорит, трое”; одного дал дочерям: “И вас трое”; а себе взял двух гусей “Вот, говорит, и нас трое с гусями, — все поровну” ».

НЕ ПО СВОИМ МЕСТАМ

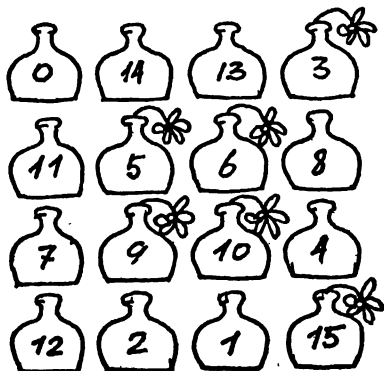
Точно: 9.

ЧАШКИ-ЛОЖКИ ДЛЯ *n* МЕДВЕДЕЙ

$P = 44$ и по формуле $P = 5! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) = 44$
 $(5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad 2! = 1 \cdot 2).$

ЛЕГЕНДА О МАГИЧЕСКОМ КВАДРАТЕ ФРАНКЛИНА

Решение представлено на рисунке. Магическая сумма $S = 30$. Трюк в том, что хотя шесть бутылочек (они помечены цветочками в горлышках) не передвигались, только одна из шестнадцати (№ 8) сохранила номер первоначально занимаемого ею места.



ПРОДЕЛКИ ЧЕРТА ПОД РОЖДЕСТВО

Пусть студент должен был получить x р., y к., то есть $100x + y$ копеек. Кассир по ошибке выдал $100y + x$ копеек. В соответствии с условием: $100y + x - 5 = 2(100x + y)$. Так как x и y целые положительные числа, причем $y < 100$, то легко установить, что $x = 31$, $y = 63$. Студент должен был получить 31 р. 63 к.

ЧЕРТ О СТУДЕНТЕ

См. рисунок. Имя студента Олег. Он приехал в Москву из Казани (от Казани до Москвы по железной дороге 793 км). Примечание к № 14 по горизонтали: уравнение $x^2 + y^2 = 65$ имеет точно 16 пар целых корней: $(\pm 1, \pm 8)$, $(\pm 8, \pm 1)$, $(\pm 4, \pm 7)$, $(\pm 7, \pm 4)$ — в каждой паре по 4 комбинации знаков.



	¹ 7	² 3		³ 5	⁴ 5
⁵ 1	9	4	⁶ 1		6
⁷ 7	3		4		
		⁸ 6		⁹ 2	¹⁰ 6
¹¹ 4		¹² 4	¹³ 2	2	5
¹⁴ 1	6		¹⁵ 1	5	

«ГОРОД СТАР, ГОРОД СЕД, ГОРОДУ 1140 ЛЕТ»

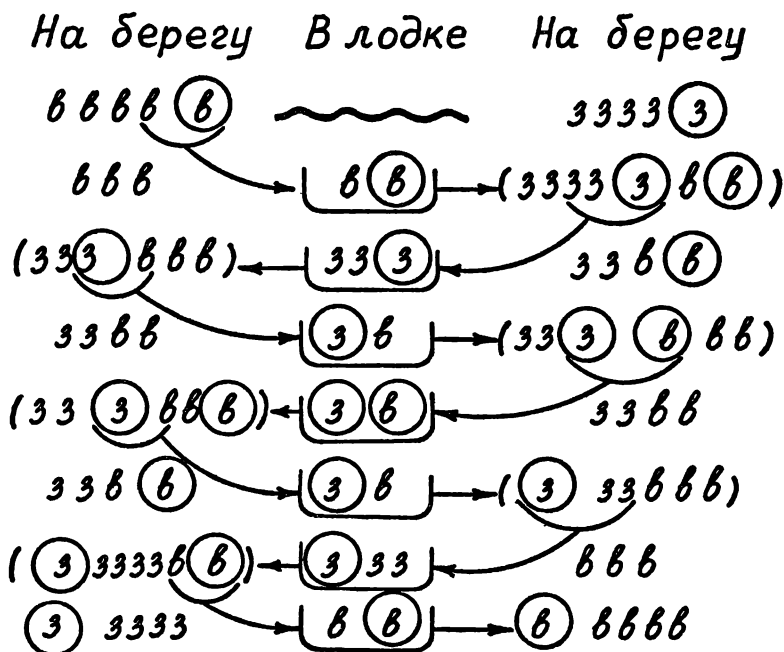
Рассуждаем так: каждый мост имеет 2 конца, поэтому число концов должно быть четным. Но из описания следует, что это число равно $4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1$ и еще 5 концов, расположенных на берегах материка. Получается, что сумма концов мостов нечетная, а этого не может быть.

СКАЗКА О ЛЖЕЦАХ И ПРАВДОЛЮБЦАХ

Турист спросил прохожего: «Вы живете в этом городе?». Получив ответ «нет», турист сообразил, что находится он в г. Л., так как в г. П. любой прохожий ответил бы ему «да» и именно в г. Л. он и мог получить ответ от каждого прохожего «нет». При этом житель г. П. сказал бы правду, а житель г. Л. — солгал.

БАЗАРНАЯ ЛОГИКА

Если бы на первые два вопроса Коту ответили «да», то это означало бы, что было три разных стоимости ожерелья, а не две, как сказано в условии задачи. Следовательно, на все три вопроса Кот получил ответ «нет» — и, значит, ожерелье он не купил.



ФАНТАСТИКА В ДВУХ ЭПИЗОДАХ

Первый. Если простое число $p \neq 3$ и, разумеется, не кратно трем, то остаток (r) от деления p на 3 равен 1 или 2. Если $r = 1$, то $p + 2$ делится на 3, если $r = 2$, то $p + 4$ делится на 3 и, следовательно, при $p \neq 3$ не существует тройки подряд идущих нечетных чисел, каждое из которых простое.

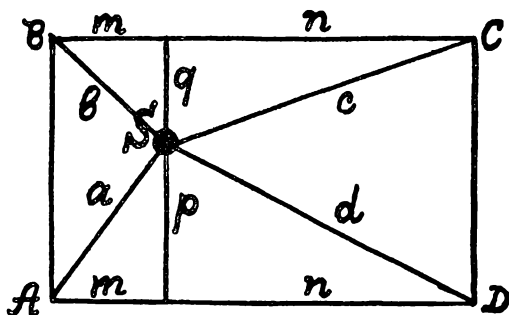
Второй. Схема переправы показана на рисунке (с. 100). Умеющие грести веслом заяц и волк — в кружочках.

КТО ПЕРВЫЙ СКАЗАЛ «Э!»

Предположим, Бобчинский первый сказал «Э!», и Добчинский это знает. Тогда фразы (1) и (9) — ложь, а (5) — правда. Учитывая «показания» спорящих, следует признать правдой фразы (4) и (7), (6) и (8). Далее, если (2) — ложь, то (3) — правда и наоборот. Получается, что верных фраз-утверждений четное число и потому заключаем: Бобчинский не мог быть первым из сказавших «Э!»

ЛУНА ЗАГРУСТИЛА НАПРАСНО, ИЛИ ФОРМУЛА ФУТБОЛЬНОГО МЯЧА

Пусть $ABCD$ — прямоугольник (рис. внизу), S — произвольная точка, безразлично — принадлежащая или не при-



надлежащая плоскости прямоугольника, $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, $SD = d$, $SE \perp AD$ и $SE = p$, $SF \perp BC$ и $SF = q$, $AE = BF = m$, $ED = FC = n$. Из образовавшихся прямоугольных треугольников имеем:

$$(1) \begin{cases} a^2 = m^2 + p^2 \\ c^2 = n^2 + q^2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} b^2 = m^2 + q^2 \\ d^2 = n^2 + p^2. \end{cases}$$

Складывая уравнения в системах (1) и (2), получаем: $a^2 + c^2 = m^2 + n^2 + p^2 + q^2$, $b^2 + d^2 = m^2 + n^2 + q^2 + p^2$, откуда $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

НУ, ЗАЯЦ, ПОГОДИ!

Да, желанный для волка момент не наступит никогда, так как диагональ и сторона квадрата несоизмеримы.

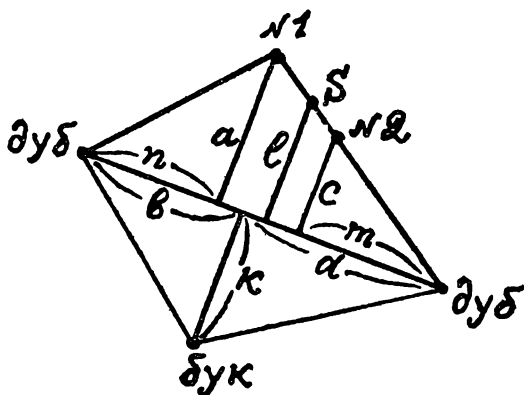
ОХ ЭТИ ДРОБИ!

Любой множитель в заданном произведении имеет вид $\frac{2n-1}{2n}$, $n = 1, 2, \dots, 50$. Введем второе произведение из 49 дробей и одной единицы: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{98}{99} \cdot 1$, любой множитель которого, кроме последнего (единицы), имеет вид $\frac{2n}{2n+1}$, $n = 1, 2, \dots, 49$. Так как $\frac{2n}{2n+1} > \frac{2n-1}{2n}$ при одном и том же значении $n = 1, 2, \dots, 49$ и $1 > \frac{99}{100}$, то второе произведение больше первого (заданного), а если их перемножить (фактически произойдет сокращение всех множителей числителя и знаменателя), то получится $\frac{1}{100}$.

Следовательно, заданное произведение меньше, чем $\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$.

ПИРАТЫ И ЗАРЫТОЕ СОКРОВИЩЕ

На рисунке точка S — середина расстояния между точками № 1 и № 2, где зарыто сокровище. Из этих точек и точки «бук» проведены перпендикуляры к прямой «дуб» — «дуб». Из равенства прямоугольных треугольников с общей вершиной «дуб» — слева следует $a = b$. Из равенства прямоугольных треугольников с общей вершиной «дуб» — справа следует $c = d$. Расстояние $l = \frac{a+c}{2}$ и должно, следовательно, быть равно половине расстояния между дубами. Далее, так как $n = k$ и $m = k$, то $n = m$, поэтому точка T должна лежать на середине расстояния между дубами. Как видим, для практического решения задачи бук не нужен; юнга просто протянул веревку между дубами и отшагал от середины между ними расстояние, равное половине длины веревки перпендикулярно ее протяжению.

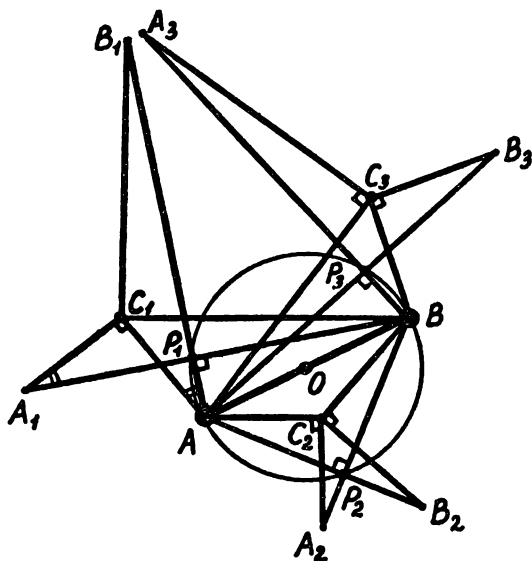


ДРУГОЙ ВАРИАНТ СКАЗКИ О СОКРОВИЩЕ

Выполнив построения, связанные с пальмой C_1 (см. рис.), рассмотрим треугольники AC_1B_1 и BC_1A_1 . По построению две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого и $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1$ (каждый равен $\frac{\pi}{2} + \angle AC_1B$), следовательно, треугольники AC_1B_1 и BC_1A_1 равны, откуда $\angle B_1AC_1 = \angle BA_1C_1$; $\angle AP_1B$ — внешний для треугольника AP_1A_1 , поэтому

$$\begin{aligned}\angle AP_1B &= \angle P_1AA_1 + \angle P_1A_1A = \\ &= \angle B_1AC_1 + \underbrace{\angle C_1AA_1}_{\frac{\pi}{4}} + \underbrace{\angle C_1A_1A}_{\frac{\pi}{4}} - \angle BA_1C_1 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Значит, треугольник AP_1B — прямоугольный с гипотенузой AB .



Аналогичные построения, связанные с пальмами C_2 и C_3 , очевидно, приведут к образованию других прямоугольных треугольников: AP_2B и AP_3B с общей гипотенузой AB . Следовательно, их вершины (P_1, P_2, P_3) должны лежать на одной окружности, диаметр которой — AB . Поэтому середина O промежутка между камнями (A и B) и есть место, где зарыто сокровище. Пальмы, как ориентиры, оказались ненужными.

МАСТЕР, ПРИНЦЕССА И СОЛДАТ

Мастер получил 1350 жемчужин и составил магический квадрат (рис. а). После прибавления или удаления 9 жемчужин получаются магические квадраты, элементами которых являются пары простых чисел-близнецов (рис. б, в).

60	198	192
282	150	18
108	102	240

а)



59	197	191
281	149	17
107	101	239

б)



61	199	193
283	151	19
109	103	241

в)

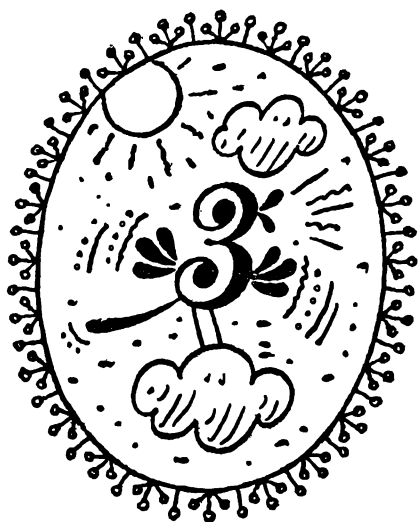


ЕЩЕ ЗАДАЧА

Модель магического квадрата 4×4 , все элементы которого — простые числа, представлена рисунком. Если каждый элемент увеличить на две единицы, то вновь образуется магический квадрат, состоящий только из простых «чисел-двойников» данных чисел.

29	269	1049	149
1061	137	101	197
179	1019	239	59
227	71	107	1091





ПРОИСШЕСТВИЯ
И ПРИКЛЮЧЕНИЯ
НА ТРОПИКАХ
МАТЕМАТИКИ.

Да, много решено загадок
От прадеда и до отца,
И нам с тобой продолжить надо
Тропу, которой нет конца.

В. Ноздрев, профессор

Участники событий и очевидцы утверждают, что все происходило в точном соответствии с их рассказами.

УТРОМ В КАФЕ

1. Завтракая каждое утро в кафе, я познакомился там с любопытным человеком. Он обладал способностью замечать и запоминать разнообразные числовые соотношения. Получая, например, на завтрак кофе, он уже знал, что в полной чашке — ровно 6 глотков.

Однажды утром, просматривая газету, Петр Петрович (так звали моего знакомого) торопливо сделал первый глоток кофе из наполненной чашки и заметив, что кофе без сливок, попросил дополнить чашку сливками.

Следующие два глотка также не доставили удовлетворения Петру Петровичу; он попросил вновь дополнить чашку сливками. Теперь Петр Петрович отпил половину чашки кофе, вновь дополнил сливками и на этот раз выпил всю чашку кофе с удовольствием.

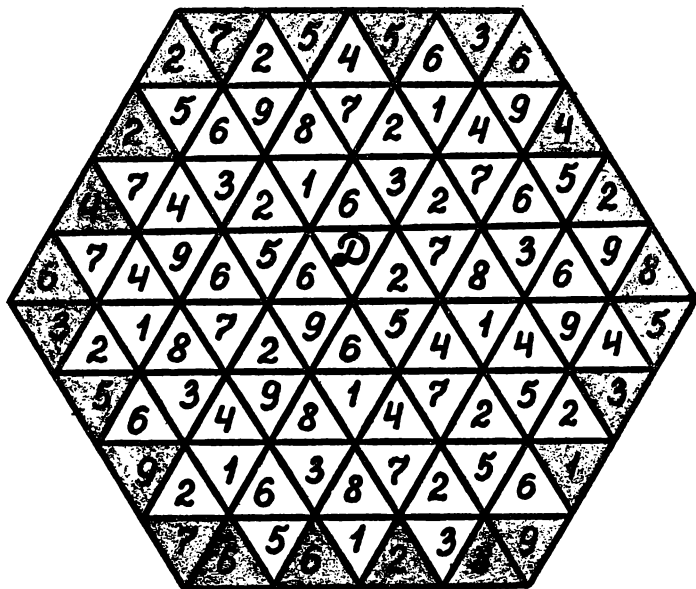
Сообщив эти количественные сведения, Петр Петрович потребовал от меня дать ответ на такой вопрос: чего он больше выпил — кофе или сливок? Что ему ответить?

2. В том же кафе, в ожидании заказанного мороженого, я заметил трех завтракающих. При этом двое из них ели сосиски, двое винегрет, а двое виноград. Тот, который не ел сосисок, не ел и винегрет. Тот, который не ел виноград, не ел и винегрет.

Что имел на завтрак каждый из трех — определите точно.

ВЕЧНЫЙ СКИТАЛЕЦ

Так с горечью назвал себя очередной рассказчик и показал нам «маршрутную карту» своих скитаний. Его дом (Д) находится в центральном треугольнике нарисованного «плана местности» (см. рис.).



Цифры, размещенные в остальных треугольниках, предписывают путнику, покидающему треугольник, сделать столько шагов, сколько указано в этом треугольнике (шагом называется переход в любой соседний треугольник через его сторону, но не через вершину).

Так, войдя в треугольник с цифрой 4 (вверху «плана местности»), путник обязан далее сделать 4 шага — пройти, например, через треугольники 7, 8, 1 в треугольник с цифрой 2; отсюда сделать 2 шага (например, через треугольники 1, 6) и так далее.

— С какого бы из 24 заштрихованных периферийных треугольников я ни начинал маршрут, — жалуется рассказчик, — я никак не могу попасть в дом и остаться там. Выясните, почему?

ОБЫЧНО РОПЩЕТ НЕПРАВЕДНЫЙ

— Вспомнилось одно давнее событие, — вступил в разговор следующий рассказчик. — Путешествуя по Аравии я увидел однажды двух арабов, расположившихся на обочине дороги с намерением позавтракать. Пригласили и меня присесть и позавтракать с ними.

Один араб вынул из сумки и положил на коврик 5 аппетитнейших лепешек, второй — 3 таких же лепешки. Я не отказался от приглашения и согласился позавтракать с ними их лепешками с тем условием, что заплачу за съеденную мною долю завтрака.

Втроем мы съели все 8 лепешек равными долями. Уходя я оставил 8 одинаковых серебряных монет как плату за съеденную мною порцию лепешек. Тот араб, который предлагал для завтрака 5 лепешек, забрал 5 монет себе, а 3 отдал своему спутнику, предоставившему 3 лепешки.

Тут, получивший 3 монеты, возроптал: «Мало! Я хочу получить 4 монеты — половину из оставленных восьми монет на двоих, поскольку доли съеденного были у нас одинаковыми».

— Я остался безучастным к претензии «обиженного» — ведь ропщет обычно неправедный, и пошел дальше своей дорогой.

По дороге, размышляя и вычисляя, я пришел к выводу, что математически справедливо было бы арабу, отдавшему на съедение 5 своих лепешек, взять себе не 5, а 7 монет из моих восьми, а второму, за его 3 лепешки, отдать лишь одну монету, вместо трех.

Какие вычисления привели рассказчика к такому выводу?

СКОЛЬКО СЫНОВЕЙ И ВНУКОВ?

Я присел на скамейку рядом с двумя стариками и слышу как один говорит другому: «У каждого из моих сыновей столько же сыновей, сколько у меня, а потому число моих внуков превышает пятьдесят, но все же меньше восьмидесяти. Сметни-ка, сколько всех сыновей в этой компании?»

Сначала мне показалось, что информация недостаточна для точного ответа, но, подумав, понял, что ошибался. Задача оказалась разрешимой.

Как надо рассуждать?

ДОЯРКА И ЖУРНАЛИСТЫ

В перерыве между заседаниями зонального совещания доярка Фаина Котикова рассказала журналистам о повседневных сторонах своей жизни. Однако на вопрос о том, сколько коров она выдаивает, Фаина не дала прямого ответа, а предложила угадать.

Каждый из шести собеседников высказал по одному предположению: 37, 50, 46, 53, 40, 30.

— Никто не угадал, — рассмеялась Фаина, — но вы сами найдете точный ответ на свой вопрос, если я скажу, что кто-то из вас ошибся на 6, кто-то на 11, остальные на 9, на 1, на 12 и на 4.

Убедившись в том, что здесь не обойтись без арифметических подсчетов, журналисты и вас приглашают вместе с ними принять участие в решении задачи Фаины Котиковой.

В самом деле: сколько коров она обслуживает?

ШУТКА

Пришел мальчуган на ферму.

— Мама послала меня купить литр коровьего молока.

— Но у тебя для этого мала посуда.

— Тогда дайте мне литр козьего молока.

В МУЗЕЕ ЧАСОВ

Да, да, есть и такой музей. Часов там много всяких: старинных и современных, механических и электрических, огромных и крошечных, с боем и без боя, с циферблатом и без циферблата.

Более тысячи лет тому назад были изобретены первые механические часы. Часы очень долго имели лишь одну стрелку — часовую. Только с 1700 года появилась на часах и минутная стрелка, а еще через 60 лет — секундная.

400 лет часы приводятся в действие пружиной. А вот наручные электронно-механические часы совсем и заводить не надо. Крошечный сухой элемент в полтора вольта способен двигать стрелку часов целый год без остановок. Через год смени батарейку или старую подзаряди и снова год носи часы, не думая о заводе.

Еще удивительнее часы, для действия которых достаточно энергия обыкновенного дневного света или света 16-ваттной электролампочки.

* * *

В числе тикающих и безмолвствующих обитателей музея были двое действующих часов с боем одинаковым по тембру. Однажды они ударили подряд, как я насчитал, 19 раз. Это произошло потому, что начало боя на первых часах опоздало по отношению ко вторым часам на 2 секунды. Кроме того, первые часы, оказывается, ударили через каждые 3 секунды, а вторые — через 4 секунды.

Который был час?



ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ СИТУАЦИЯ

Юноша-практикант должен принести ровно 4 л смазочного масла. В его распоряжении были только две пустые канистры вместимостью в 3 и 5 л. Других измерителей объема у него нет. Вернуть в бак масло, налитое в канистру, невозможно. Поэтому, чтобы опустошить заполненную канистру, приходится выливать масло в запасной бак. Практикант задание выполнил — принес ровно 4 л масла. При этом он добился минимально возможной потери масла. Потеря — это количество масла, вылитого в запасной бак.

Какую последовательность переливаний масла он избрал?

ЧЕГО НЕТ В ФИЛЬМЕ «СПРУТ»?

Мимо Робертино промчался автомобиль с преступниками. Позже на вопрос комиссара Каттани мальчик ответил, что номер машины не запомнил, но припоминает, что он был четырехзначным, симметричным и сумма его цифр совпадала с числом, образуемым первыми двумя цифрами. Эти сведения оказались достаточными, чтобы определить номер машины, и преступники были схвачены!

ЗАГАДОЧНЫЕ УКАЗАТЕЛИ РАССТОЯНИЙ

Вдоль дорог обычно бывают расставлены указатели расстояний от некоторого начального пункта до данного места (раньше их называли верстовыми столбами). Поезд, в котором я ехал, долго-долго шел равномерно без остановок (с постоянной скоростью). Через окно вагона я заметил указатель расстояния с двузначным числом. Ровно через час промелькнул второй указатель. Число было опять двузначное, записанное теми же цифрами, что и в первый раз, но в обратном порядке. Еще через

час на указателе расстояний появилось трехзначное число. Крайние цифры совпали с цифрами первого указателя, а средней цифрой оказался 0.

Какие числа я заметил на указателях и с какой скоростью шел поезд на этом участке пути?

АЛГОРИТМ СИЛЬНЕЕ СЛУЧАЯ

Действующее лицо следующего математического приключения — контролер. Вчера он разложил 90 доброкачественных деталей в 9 ящиков поровну и в отдельный ящик — 10 бракованных деталей. Все 10 деталей оказались забракованными, потому что каждая из них весила 0,9 г, а любая доброкачественная весит 1 г. Ящики он не пометил и сегодня не может вспомнить, в котором из них лежат бракованные детали.

Придется взвешивать, причем поскорее — детали пора отправлять. Но взвешивать по одной детали из каждого наудачу выбранного ящика, значит — надеяться на случайную удачу, а если не повезет, то придется делать 9 взвешиваний. Контролер обошелся одним взвешиванием. Каким образом?

ВОЗРАСТНАЯ ЛЕСЕНКА

Летний лагерь. У костра группа подростков и воспитательница. Шутят, смеются.

Воспитательница. — Ребята! У меня есть друг — Асамбай. Он — пастух, и отец, и дед, и прадед Асамбая — пастухи. Кого этим удивишь в Казахстане? Но вот занятное сложилось соотношение их возрастов в этом году. Об этом недавно написал мне Асамбай (читает):

«Подсчитал я произведение своего возраста на возраст отца, а затем в каждом сомножителе поменял местами цифры и представьте — произведение не изменилось. Слушайте далее. Перемножил я число своих лет на возраст деда

и также поменял местами цифры в каждом сомножителе — опять произведение не изменилось. А более всего меня удивило то, что и в третий раз картина повторилась с произведением моего возраста на возраст прадеда».

— Ребята! А у кого-нибудь из вас, кому больше 10 лет, получается столь же забавная возрастная лесенка? Ну, хотя бы с двумя парами возрастов: у себя и папы, у себя и бабушки или дедушки? Катя, тебе сколько лет?

Катя. — 12, папе 37. Не получается у меня так, как у Асамбая. Я прикинула: $12 \cdot 37$ — последняя цифра 4, а в произведении $21 \cdot 73$ — последняя цифра 3.

К разговору прислушивался, стоявший в стороне вихрастый паренек. Он подходит к группе беседующих.

Вихрастый. (Обращаясь к воспитательнице) — Скажите, пожалуйста, сколько лет Асамбаю?

Воспитательница — Пусть для всех присутствующих это будет задачей, а тебе я скажу по секрету (шепчет на ухо).

Вихрастый. — Ну, так слушайте. Я на год старше Асамбая, знаю возраст отца, деда и прадеда, но поразительно то, что и в нашей семье получается аналогичная стабильность с произведениями возрастов, как у Асамбая.

Воспитательница. — Итак, выяснилось, что существуют по крайней мере две интересные возрастные лесенки — каждая из трех ступенек: он и папа, он и дед, он и прадед. Приглашаю всех приступить к поискам возрастов Асамбая, юного гостя, подошедшего к нашему огоньку, и их пап, дедов и прадедов.



ФРАНЦУЖЕНКИ В ДЖИНСАХ

Жанна, Франсуаза и Шарлотта, встретившись однажды, с удивлением обнаружили, что они в совершенно одинаковых джинсах.

Какого фасона на них джинсы: 1) узкие (У) или клеши (К), 2) темные (Т) или вылинявшие (В), 3) с карманами (С) или без карманов (Б), если известно, что у Жанны есть джинсы с карманами (С), есть так же узкие вылинявшие без карманов (У В Б), у Франсуазы — джинсы без карманов (Б) и узкие вылинявшие с карманами (У В С); Шарлотта же имеет джинсы-клеши (К) и темные узкие джинсы с карманами (Т У С)?

ДАВНО НЕ ВИДЕЛИСЬ

Встретились два старых приятеля Б. и Н.

Б.: Здравствуй, как жизнь?

Н.: Течет понемножку. Уже тремя сыновьями обзавелся.

Б.: Сколько лет им?

Н.: Нетрудно определить: произведение всех возрастов — 36, а сумма возрастов равна числу окон в доме напротив.

Б. (подумав): Этих данных еще недостаточно.

Н.: Кроме того, старший сын весь в меня.

Б.: Теперь ясно. Что ж ты сразу не сказал об этом?

Определите и вы возраст сыновей господина Н.

СПОРТИВНЫЕ ВСТРЕЧИ НА ТЕННИСНОМ КОРТЕ

Четыре друга — Андрей, Борис, Володя и Гриша — каждый со своей сестрой, пришли играть в теннис: мальчик и девочка в паре против мальчика и девочки в другой паре. Елена и Андрей (1) — против Даши в паре с братом Жанны (2). Известно также, что Зоя играла в паре с братом Даши (3), сестра Володи — с Борисом (4), а Володя — в паре с сестрой Андрея (5). Назовите по именам сестер каждого из мальчиков и кто с кем в паре играл в теннис?

СЛУЧАЙ НА КОНФЕРЕНЦИИ

Однажды на международной конференции, в перерыве, попытались было разговариваться четыре делегата разных национальностей. Каждый умел говорить на двух языках: на родном и на языке одного из этой группы собеседников, но общего языка у всех четырех не оказалось. Чтобы не подсказать национальность, я укажу только первую букву фамилии каждого (в русской транскрипции): А, Б, В, Г.

Никто из них не владел сразу французским и немецким языками.

Трое имели общий язык, но этими тремя не были А, В и Г.

Б говорил по-немецки и мог разговаривать с В, хотя В ни слова не понимал по-немецки.

Когда А и Б хотели обменяться впечатлениями о конференции, то просили нашего делегата Г быть посредником-переводчиком; английского языка Г не знал.

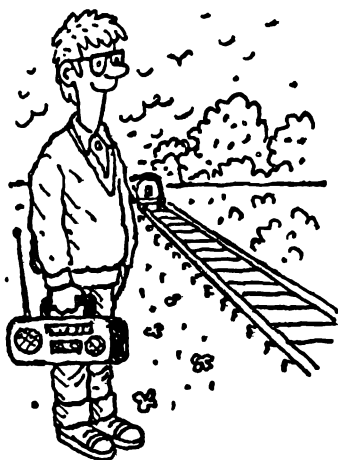
Три языка упомянуты: английский, немецкий, французский, четвертым языком был русский. Определите, какими двумя языками владел каждый из четырех делегатов А, Б, В и Г и какой родной язык у каждого.

ПОЧЕМУ У ВАЛИ ОН БЫВАЕТ ЧАЩЕ?

Через станцию «Спутник» между 12.10 и 14.00 проходят пригородные поезда регулярно через каждые 10 мин в северном направлении и также регулярно через каждые 10 мин в южном направлении, причем «южный» поезд приходит на платформу регулярно через 2 мин после прихода «северного» поезда.

Студент Многогранкин летом жил вблизи этой станции. Регулярно три раза в неделю он ездил поездом либо к однокурснице Вале в северном направлении, либо к однокурснице Тане в южном направлении.

Он еще не вполне определил, которая из этих девушек влечет его больше, и пока все предоставил случаю. Студент



выбирал наугад какой либо момент после полудня, шел к платформе и садился в тот поезд, который прибывал первым. Он предполагал, что таким образом за лето количество поездок к Вале и Тане будет приблизительно одинаковым. В действительности же оказалось, что к Вале он попадает чаще — в среднем 4 раза из 5. Чем это объясняется?

ВО ВСЕМ НУЖНА СНОРОВКА...

Казалось бы не мудреное дело было мне поручено — определить толщину изготовленных валиков с помощью стальной калибровочной плиты.

В этой плите высверлено 15 отверстий разных диаметров. Диаметр первого отверстия 10 мм, каждого последующего на 0,04 мм больше. Пытаясь вставлять валик в разные отверстия, надо, в конце концов, найти такие два *соседних* отверстия, что в одно из них валик вставляется, а в другое нет. На этом процесс измерения заканчивается и калибр валика считается установленным. Если, например, в отверстие диаметром 10,16 мм валик вставляется, а в соседнее отверстие, диаметр которого 10,12 мм, валик не вставляется, то его калибр $10,12 \div 10,16$ мм.

Валики тоньше 10 мм и толще 10,56 мм отбрасываются.

Посмотрели бы вы, как неразумно и суматошно я оперировал. Пробовал вставлять валик подряд во все отверстия или пытался сначала на глаз определить возможный калибр — все равно затрачивал гораздо больше времени, чем мой напарник, пожилой и опытный рабочий — Николай Тимофеевич.

Наблюдая ритмичные и планомерные действия Николая Тимофеевича, я заметил, что разные валики он пробовал на разных отверстиях, но количество проб у него для любого валика оказывалось одинаковым, и это больше всего меня поразило!

— Обучите меня своей системе испытаний валиков, — попросил я Николая Тимофеевича.

— Да, это — наиболее экономная система проб. Понаблюдай еще немного и сам поймешь, — ответил мне мастер.

А вы сообразили, сколько проб измерений делает Николай Тимофеевич для калибровки каждого валика и какова очередность проб?

БЫЛЬ ИЛЬ НЕБЫЛИЦА

О математике Сканави М.И., инициативе которого во многом обязано возникновение КВН и создание получившего широкое распространение «Сборника задач по математике...» (под ред. М.И. Сканави), рассказывают так: шел по улице Марк Иванович с сыном и повстречались им трое его знакомых. Поговорили немного, разошлись. А Марк Иванович и говорит сыну: «Моим знакомым, вместе взятым, в 4 раза больше лет, чем тебе. Произведение же их лет составляет 2450. Зная это, сможешь ли ты определить возраст каждого?»

Юноша подумал и сказал, что необходимо еще хотя бы одно ограничение. «Да, — согласился Марк Иванович, — все они моложе меня».

Теперь юноша быстро дал правильный ответ. Для сына Марка Ивановича задача оказалась нетрудной, так как ему был известен возраст свой и отца. Однако, и не зная этого, можно определить возраст не только трех знакомых Марка Ивановича, но и возраст самого Марка Ивановича и его сына. Решите эту задачу.

Предполагается, что все числа лет — целые, меньше 100 и больше 1.

АНАЛОГИЧНЫЙ ЭПИЗОД

Как-то ребята-кружковцы спросили своего учителя математики: «Какого вы года рождения?» — «В далеком, 1964 году, — ответил учитель, — мне исполнилось столько лет, какова сумма цифр моего года рождения. Поскольку я родился в этом веке, вы легко можете вычислить мой возраст». В каком же году родился этот учитель?

В ЛЕКЦИОННОМ ЗАЛЕ БОЛЬНИЦЫ

В лекционном зале больницы находилось 35 человек: врачи, сестры и несколько выздоровевших, уже сменивших больничные пижамы на пиджаки и брюки. Сестер в зале было больше, чем выздоровевших, а врачей было в 5 раз больше, чем женщин.

Сколько человек каждой категории находилось в зале? (Условие задачи допускает единственный ответ.)

ПРИКЛЮЧЕНИЕ С ДЕЛЕНИЕМ

Забавный случай: некоторое натуральное число, с цифрой десятков 3, делилось с остатком на другое натуральное число, цифрой единиц которого была четверка. При повторном делении цифру 3 в делимом ошибочно приняли за 8, а цифру 4 в делителе — за 9.

К удивлению, ни частное, ни остаток не изменились.

Чему равно это частное? Кроме того, докажите самостоятельно, что делитель должен быть не менее, чем трехзначным числом.





ПРИКЛЮЧЕНИЕ С ЗОЛОТОЙ ЦЕПОЧКОЙ

Вспоминая очень давние события, рассказывают о случае с дамой, пожелавшей поселиться на несколько дней в гостинице. Каждый прожитый день оплачивать следовало раздельно. Но денег у дамы нет, и единственной ценностью, которой она обладала, была золотая цепочка, скованная из одинаковых колечек. Хозяин гостиницы согласился получать в уплату по одному золотому колечку каждый день, но попросил даму не откалывать от цепочки по одному колечку, а сразу рассечь какое-то минимальное количество колечек, чтобы цепочка распалась на несколько секций, с помощью которых дама могла бы расплачиваться с хозяином *одним колечком* (не исключая рассеченных) *ежедневно*.

Простейший вариант: цепочка изготовлена из 7 колечек, тогда достаточно рассечь одно колечко — третье. При этом, не считая рассеченного, образуются две секции: одна — из двух колечек, вторая из четырех (см. рис.). За первый день проживания в гостинице дама отдаст хозяину рассеченное колечко. За второй — отдаст секцию из двух колечек и получит обратно рассеченное. За третий — опять рассеченное. За четвертый — секцию из четырех колечек, а 3 колечка хозяин ей возвращает, и т.д. К седьмому дню у дамы останется одно рассеченное колечко. Отдала дама последнее колечко и покинула гостиницу.

Если бы цепочка дамы состояла из 23 колечек, достаточно было бы рассечь только два — четвертое и одиннадцатое, чтобы, комбинируя образовавшиеся секции, иметь возможность отдавать хозяину по колечку в день. Убедитесь в правильности такого решения.

Итак, если в цепочке 7 колечек, то достаточно рассечь одно из них. Если в цепочке 23 колечка, то рассечь следует 2 из них.

Любопытно: сколько же одинаковых колечек первоначально должно быть в цепочке, чтобы оказалось достаточно рассечь только 3 колечка? 4 колечка? и вообще любое заданное число (m) колечек? Решите!

БЫВАЕТ ЖЕ ТАКОЕ...

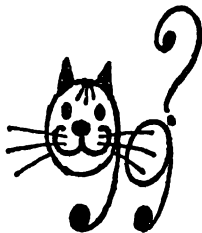
1. — Алло, Катя! Нам поставили телефон. Номер, как у тебя — пятизначный. Первая цифра — простое число (напомню: целое, большее единицы, не имеющее других делителей, кроме самого себя и единицы), следующие две цифры образуют двузначное простое число, а последние две цифры получаются из предыдущей пары перестановкой и образуют точный квадрат, равный сумме всех пяти цифр. Определи, какой у меня номер телефона?

2. Или — другой случай: решили ребята навестить свою любимую учительницу математики, Анну Константиновну Луковцеву. По дороге им припомнилось, что даже свой адрес Анна Константиновна сообщила как занятную шараду:

— Одни и те же две цифры образуют номер дома и номер квартиры, причем сумма этих цифр равна разности между номером дома и номером квартиры.

Шарада была разгадана, и визит к учительнице состоялся.

Разгадайте и вы эту шараду.



«ДИНАМО» — «РОТОР» — С КАКИМ СЧЕТОМ?

Состоялось 15 игр между шестью футбольными командами (каждая команда встречалась с каждой из остальных по одному разу).

Ничьих и одинаковых результатов не было. Ни одна из команд не взяла ворота противника более шести раз в каждой игре. При этом сумма очков (гол — очко), приобретенных всеми командами в 15 играх, оказалась минимально возможной.

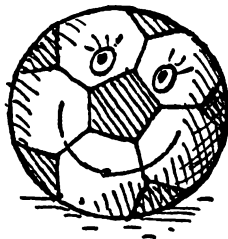
Команда, занявшая первое место, победила во всех встречах с наибольшим возможным выигрышем числа очков в каждой встрече.

Команда, занявшая второе место, проиграла только команде, занявшей первое место, в остальных встречах она победила с наибольшим возможным выигрышем числа очков в каждой встрече.

Команда, занявшая третье место, проиграла только командам, занявшим первое и второе места, в остальных встречах победила с наибольшим возможным выигрышем числа очков в каждой встрече. И т.д.

«ЦСКА» победила «Локомотив» со счетом 1-0. Команда «Локомотив» проиграла команде «Ротор». «Торпедо» три раза взяла ворота команды «Динамо» и только один раз — ворота команды «Спартак».

Сообщенных сведений вполне достаточно, чтобы сказать точно, какая команда заняла первое место и с каким счетом окончилась игра команды «Динамо» против команды «Ротор»?



ИСТОРИЯ ОДНОГО ЗАНЯТНОГО КОНКУРСА

Редактор «Электроники» — так называлась многотиражка одного крупного предприятия — обратился к директору с просьбой разрешить провести среди читателей газеты конкурс на «острый глаз», и выделить некоторую сумму на премии победителям.

— Что вы имеете в виду? — поинтересовался директор.

— Мы подготовим 50 принципиальных схем наших изделий, незначительно отличающихся одна от другой, и по одной копии каждой схемы. Получится 50 пар схем-близнецов. Тщательно их перетасуем и начнем помещать в газете в каждом номере, скажем, по 5—6 схем.

Расскажем читателям «Электроники» о конкурсе и обратимся с таким предложением:

«Вырезайте схемы из газеты и храните. Когда подберете 100 схем, рассмотрите их внимательно и к каждой схеме подыщите ее копию. Все подобранные пары схем-близнецов передайте редакции газеты. Принимать будем только полный комплект из 50 пар.

Через неделю после окончания печатания схем мы опубликуем фамилии тех, у кого в комплекте переданных нам схем окажется больше правильно подобранных пар».

— Ну, что ж, действуйте, — одобрил директор, — дадим и небольшие премии победителям.

* * *

Правильно рассортировать на одинаковые пары сотню схем, мало отличающихся одна от другой, — нелегкая задача и неудивительно, что у 98,1% от числа приславших решения оказалось по 4 и больше неправильно подобранных пар.

Число участников конкурса, неправильно подобравших только 3 пары, на 18 больше числа участников, неправильно подобравших только 1 пару.

Участников конкурса, неправильно подобравших только 2 пары, оказалось ровно столько же, сколько и тех, кто все 50 пар скомплектовал правильно.

Для завершения рассказа об истории конкурса следовало бы сообщить, сколько человек приняло участие в конкурсе и сколько оказалось победителей. Надо поразмыслить и посчитать. Несомненно вы это и сделаете.

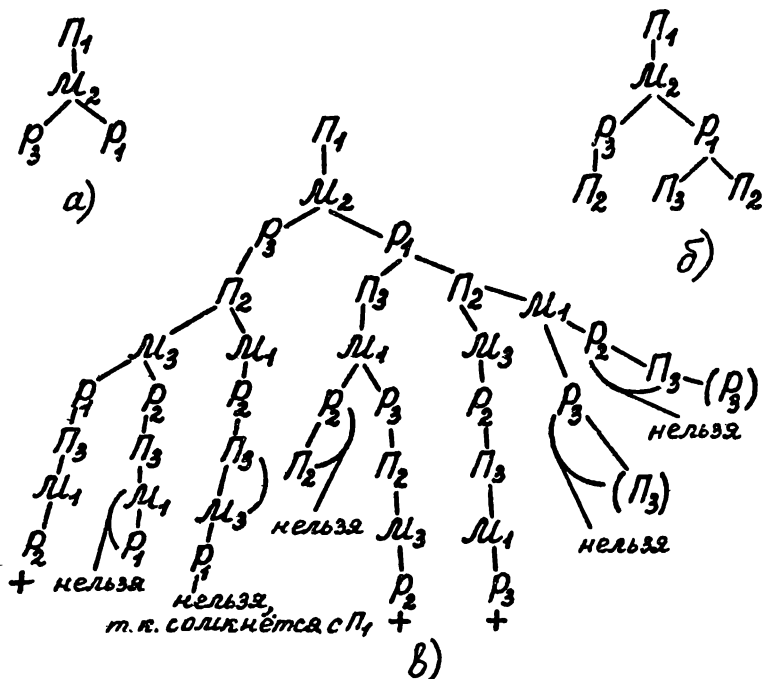
Дополнительно сообщим, что тираж газеты «Электроника» обычно не превышает 3000 экземпляров.

КОМБИНАЦИИ СОЗРЕВАЮТ НА ВЕТВЯХ «ДЕРЕВА»

Когда три семьи собирались на праздниках вместе, то за круглым столом усаживались 9 человек. Каждая семья это — папа, мама и один ребенок. Хозяйке дома доставляло удовольствие размещать всех за столом так, что каждый мужчина находился между женщиной и ребенком, каждая женщина — между мужчиной и ребенком, каждый ребенок — между женщиной и мужчиной и нигде члены одной семьи не оказывались сидящими рядом. Хозяйка не только удачно справлялась с этой задачей, но всякий раз она находила новую комбинацию такого размещения.

Сын хозяйки дома — школьник — утверждает, что у мамы богатый выбор вариантов, так как, по его подсчетам, существует 108 различных размещений, удовлетворяющих условию.

Он сообразил, что упростит подсчет, если место № 1 за круглым столом, для определенности, предоставит своему папе (P_1). Тогда рядом, на место № 2, можно посадить маму или ребенка второго семейства (M_2 или P_2) или маму, или ребенка третьего семейства (M_3 или P_3). Значит, намечаются 4 серии возможных продолжений с одинаковым конечным числом вариантов в каждой серии, удовлетворяющих условию. Поэтому достаточно продолжить формирование одной из них, например рядом с P_1 посадить M_2 (P_1-M_2). Теперь третье место может занять только P_3 или P_1 . Образуется разветвление (рис. а на с. 126). Далее: ветвь $P_1-M_2-P_1$ вырастающего «дерева возможностей» дает два «отростка»: P_2 и P_3 , а к ветви $P_1-M_2-P_3$ может присоединиться лишь P_2 (рис. б).



Завершив формирование «дерева возможностей», получим рисунок в. Три «ветви», содержащие по 9 элементов — от начального Π_1 до конечного P_2 или P_3 (на рисунке отмечены знаком «+») — представляют искомые размещения трех семей за круглым столом. «Ветвь» с P_1 на девятом месте не является решением, так как при круговом размещении оказались бы рядом P_1 и Π_1 , что недопустимо по условию. Очевидно, что остальные три серии вариантов решения приведут к идентичным «деревьям», содержащим по 3 результативных «ветви». Всего $4 \cdot 3 = 12$ пригодных размещений в предположении, что первое место за круглым столом занимает Π_1 .

Так как имеется 9 равноправных претендентов сесть на место № 1, то полным решением задачи следует признать $12 \cdot 9 = 108$ пригодных размещений.

С Нового Года к этой дружной компании присоединилась еще одна семья: папа (P_4), мама (M_4) и ребенок (P_4). Теперь за круглый стол усаживалось 12 человек. Если будут соблюдаться те же условия размещения всех двенадцати обедающих за круглым столом, то, по подсчетам того же школьника, число возможных размещений возрастает до 5040. Не ошибся ли мальчик в своих подсчетах?

Проверьте!

«Завлекалкой», побуждающей к поиску экономного способа подсчета числа искомых размещений, — сначала с предоставлением папе (P_1) места № 1, — является возможность охватить все возможные комбинации построением не более, чем трех-четырех «деревьев» с необременительным числом (например, 20 — 26) разветвлений у каждого. Подтвердилось ли число 5040?

Сравните свое решение с нашим (см. с. 142).



РЕШЕНИЯ

УТРОМ В КАФЕ

1. Завтрак Петра Петровича состоял из 6 глотков чистого кофе и 6 глотков сливок. В самом деле, первоначально чашка содержала чистый кофе (6 глотков). Предположим, что сливки, вливаемые в чашку не перемешивались с кофе и Петр Петрович в первые три приема проглатывал только чистый кофе. В три приема он сделал $1 + 2 + 3 = 6$ глотков, следовательно, выпил все кофе, при этом в чашке всякий раз оставались дополняемые сливки, постепенно заполнившие всю чашку (6 глотков). В последний прием и они были выпиты Петром Петровичем.

2. Один ничего не ел, а остальные имели на завтрак и сосиски, и винегрет, и виноград.

ВЕЧНЫЙ СКИТАЛЕЦ

Секрет невозможности попасть в дом (Δ) заключается в том, что все ячейки делятся на два множества: вида ∇ и вида Δ . Все ячейки вида ∇ заполнены нечетными числами, а ячейки вида Δ — четными. При переходе из ячейки в соседнюю виды ячеек чередуются. Очевидно, что если путник совершает маршрут, состоящий из числа шагов, указанного в «нечетной» ячейке (∇), то непременно попадает в «четную» ячейку (Δ). Если же путник очередную серию шагов совершает из ячейки Δ , в которой записано четное число, то он вновь оказывается в «четной» ячейке (Δ). А дом путника принадлежит множеству «нечетных» ячеек вида ∇ . Следовательно, домой наш путник никогда не попадет.

ОБЫЧНО РОПЩЕТ НЕПРАВЕДНЫЙ

Каждый из трех завтракавших съел по $8 : 3$ лепешек, а каждую целую лепешку рассказчик оценил в $8 : \frac{8}{3} = 3$ монеты. Из пяти лепешек первого араба рассказчик съел $5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$ лепешек стоимостью в $3 \cdot \frac{7}{3} = 7$ монет. Из трех лепешек второго араба рассказчик съел $3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$ лепешки стоимостью в $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ монету. Вот так: из восьми монет этот неправедный араб должен был взять себе лишь одну!

СКОЛЬКО СЫНОВЕЙ И ВНУКОВ?

Из условия следует, что число внуков должно быть полным квадратом. В промежутке (50 — 80) есть только один полный квадрат: 64. Значит, у старика 8 сыновей и у каждого сына также по 8 сыновей, всего сыновей в этой компании:

$$8 + 8 \cdot 8 = 72.$$

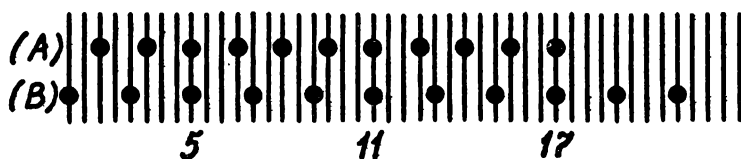
ДОЯРКА И ЖУРНАЛИСТЫ

По высказанным предположениям Фаина обслуживает не меньше 30 коров и не больше 53. При этом наибольшая погрешность, указанная Фаиной, равна 12. Это значит, что действительное число коров либо $30 + 12 = 42$, либо $53 - 12 = 41$.

Нетрудно убедиться простой проверкой, что только число 41 удовлетворяет всем условиям задачи. Фаина обслуживает 41 корову.

В МУЗЕЕ ЧАСОВ

Построим ряд параллельных отрезков, промежутки между которыми будем считать «изображением» секунд. Точками изобразим «фотографию» ударов боя первых (А) и вторых (В) часов соответственно условию задачи:



«Фотография звуков» показывает, что под номерами 5, 11 и 17 удары происходят одновременно и на слух сливаются каждый раз в один удар. Максимальное число ударов для каждого часов в отдельности равно 12, но если это было так, то мы насчитали бы 21 удар (это легко проверить по «фотографии звуков»). На рисунке показана «фотография» 19 ударов, соответствующая *одиннадцати* отдельным ударам часов А и В. Значит, часы показывали 11.

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ СИТУАЦИЯ

Возможны две последовательности переливаний (см. таблицу). Минимальная потеря масла 5 л.

Канистра 3 л	Канистра 5 л	Потеря	Канистра 3 л	Канистра 5 л	Потеря
—	5	—	3	—	—
3	2	—	—	3	—
—	2	3	3	3	—
2	—	—	1	5	—
2	5	—	1	—	5
3	4	—	—	1	—
—	4	3	3	1	—
			—	4	—
Потеря 6 л			Потеря 5 л		

ЧЕГО НЕТ В ФИЛЬМЕ «СПРУТ»?

1881 ($18 = 1 + 8 + 8 + 1$).

ЗАГАДОЧНЫЕ УКАЗАТЕЛИ РАССТОЯНИЙ

Если на первом указателе десятков x , а цифра единиц y , то первое замеченное число $10x + y$, второе $10y + x$ и третье $100x + y$.

Так как числа эти появлялись через равные промежутки времени при постоянной скорости поезда, то $(10y + x) - (10x + y) = (100x + y) - (10y + x)$.

После преобразований: $y = 6x$. Но x и y однозначные, поэтому возможно единственное предположение, что $x = 1$, $y = 6$.

Числа на указателях: 16, 61, 106. Скорость поезда 45 км/ч.

АЛГОРИТМ СИЛЬНЕЕ СЛУЧАЯ

Ящики надо перенумеровать и положить на платформу весов одну деталь из ящика № 1, отдельно (столбиком) две детали из ящика № 2, три — из ящика № 3, ..., десять — из ящика № 10. На платформе весов окажется 10 столбиков, объединяющих 55 деталей.

Определяем вес этих деталей и полученное число вычитаем из 55. Число десятых, содержащихся в разности, указывает номер ящика с бракованными деталями.

ВОЗРАСТНАЯ ЛЕСЕНКА

(12, 42, 63, 84) и (13, 31, 62, 93).

ФРАНЦУЖЕНКИ В ДЖИНСАХ

Есть три группы взаимно исключающих признаков:

$$\begin{array}{c|c|c} \text{У} & \text{В} & \text{С} \\ \hline \text{К} & \text{Т} & \text{Б} \end{array}$$

Фасон джинсов определяется тремя признаками — по одному из каждой группы. Восемь возможных комбинаций признаков по три запишем в первую строку таблицы, а ниже укажем, в соответствии с условием — кому из девушек (Ф, Ж или Ш) они подходят:

УВС	УВБ	УТС	УТБ	КВС	КВБ	КТС	КТБ
Ж	Ж	Ж	Ф	Ш	Ж	Ш	Ф
Ф	Ф	Ш			Ф		Ш
					Ш		

Единственным фасоном джинсов, который имеется у всех трех девушек, является шестой: (КВБ) — вылинявшие клеши без карманов.



ДАВНО НЕ ВИДЕЛИСЬ

Составим табличку, содержащую все возможные разбиения 36 на 3 множителя.

Возраст сыновей			Сумма возрастов
36	1	1	38
18	2	1	21
12	3	1	16
9	4	1	14
9	2	2	13
6	6	1	13
6	3	2	11
4	3	3	10

Поскольку приятель по числу окон (то есть сумме возрастов) не мог однозначно определить возраст сыновей, значит, число окон в доме равно 13 — лишь это число фигурирует дважды, поэтому имеет место одна из двух возможностей: (9, 2, 2) или (6, 6, 1).

Замечание Н. о том, что возраст одного из сыновей больше возрастов остальных, определяет первую возможность. Итак, старшему сыну 9 лет, а двум другим по 2 года.

СПОРТИВНЫЕ ВСТРЕЧИ НА ТЕННИСНОМ КОРТЕ

Из условий (1), (2), (3) и (5) следует, что сестра Андрея не Жанна, не Даша, не Елена, значит — Зоя. Определились также две игровые пары: Е, А и З, В. Остальные пары: либо Д, Г и Ж, Б (а), либо Д, Б и Ж, Г (б). Если принять вариант (а), то по условиям (2) и (4) Жанна — сестра Гриши и Володи, что невозможно. Если верен вариант (б), то по условиям (2) и (4) Жанна — сестра Бориса, Даша — сестра Володи. Автоматически определилась и четвертая родственная пара: Елена — сестра Гриши.

Играли пары: Елена и Андрей против Даши и Бориса, Зоя и Володя против Жанны и Гриши.

СЛУЧАЙ НА КОНФЕРЕНЦИИ

Следующий ответ является единственно возможным: А — француз, владел французским и английским, Б — немец, владел немецким и русским, В — англичанин, владел английским и русским, Г — русский, владел русским и французским языками.

ПОЧЕМУ У ВАЛИ ОН БЫВАЕТ ЧАЩЕ?

Причина, по которой юноша чаще ездил в северном направлении, к Вале, заключается в особенностях расписания движения поездов. В период после полудня «южный» поезд приходил на платформу «Спутник» регулярно через 2 мин после прихода «северного» поезда, следовательно, «южный» поезд мог быть первым для юноши только тогда, когда юноша приходил на платформу именно в течение этих двух минут. Если же он приходил на платформу в течение остальных восьми минут промежутка между поездами, то попадал на поезд, идущий в северном направлении. Вероятность этого случая равна $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. Естественно, что при большом числе поездок юноша чаще попадал к Вале и реже к Тане.



ВО ВСЕМ НУЖНА СНОРОВКА ...

Для калибровки любого валика с помощью стальной плиты с пятнадцатью отверстиями требуется не более четырех проб.

Сначала надо сравнить валик со *средним* отверстием (с восьмым). Предположим он встал, значит, нет нужды испытывать валик на больших отверстиях — отпадает половина отверстий — и для второй пробы надо сравнивать валик со *средним* отверстием *левой* половины плиты (с четвертым) — отпала еще четвертая часть всех отверстий плиты. Предположим, что валик опять встал, тогда для третьей пробы вновь выбираем *среднее* отверстие из оставшихся *слева* от четвертого (второе). Пусть валик встал. В этом случае сдвигаемся *вправо* и интересуемся отверстием *средним* между вторым и четвертым. Если в это отверстие (третье) валик вставляется, то его калибр между диаметрами третьего и четвертого отверстий, если же не вставляется, то его калибр между диаметрами второго и третьего отверстий.



БЫЛЬ ИЛЬ НЕБЫЛИЦА

$2450 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$. Множитель 1 не рассматриваем, так как по условию возраст каждого больше 1. Возможны такие варианты:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $2 + 35 + 35 = 72$, | 2) $2 + 25 + 49 = 76$, |
| 3) $5 + 14 + 35 = 54$, | 4) $5 + 10 + 49 = 64$, |
| 5) $5 + 7 + 70 = 82$, | 6) $5 + 5 + 98 = 108$, |
| 7) $7 + 10 + 35 = 52$, | 8) $7 + 25 + 14 = 46$, |
| 9) $7 + 7 + 50 = 64$. | |

Сразу отпадают те варианты, в которых сумма чисел не делится на 4; остаются лишь варианты: 1), 2), 4), 6), 7) и 9).

Но в вариантах 4) и 9) суммы чисел одинаковы, так что неясно какой из них мог бы подойти, и сын попросил сообщить ему еще что либо. Марк Иванович видимо согласился с тем, что выбрать надо один из этих вариантов, так как дал дополнительную информацию.

Если так, то сыну Марка Ивановича $64 : 4 = 16$ лет, а старшему из встретившихся 49 либо 50 лет. Марк Иванович сказал, что каждый из троих моложе его, после чего юноша-сын решил задачу. А это возможно лишь в том случае, если принять, что Марку Ивановичу 50 лет. Значит, вариант 9) отпадает.

Знакомым Марка Ивановича 5, 10 и 49 лет.

АНАЛОГИЧНЫЙ ЭПИЗОД

Пусть учитель родился в $\overline{19ху}$ году. В 1964 году ему исполнилось $1 + 9 + x + y$ лет. Возраст учителя можно найти, вычтя из 64 (все происходит в одном столетии) $10x + y$. Получаем уравнение $54 = 11x + 2y$. Возможно только одно решение: $x = 4$, $y = 5$. Учитель родился в 1945 году. В 1964 году ему было 19 лет.

В ЛЕКЦИОННОМ ЗАЛЕ БОЛЬНИЦЫ

Условию задачи удовлетворяет только следующий ответ: 27 врачей мужчин, 3 врача женщины, 3 сестры, 2 выздоровевших мужчины. К этому ответу приводит система уравнений:

$$\begin{cases} x + y + s + t = 35, \\ x + y = 5(y + s), \end{cases}$$

где x — число врачей мужчин, y — число врачей женщин, s — число сестер, t — число выздоровевших (из условия следует, что выздоровевшие — мужчины).

Исключая x , получим $5y + 6s + t = 35$. Предположим, что $y = 1$, тогда $6s + t = 30$. Так как по условию должно быть $s > t$, то получившееся уравнение не имеет целых положительных корней.

Предположим теперь, что $y = 2$, тогда $6s + t = 25$. При условии $s > t$ это уравнение имеет только одну пару корней: $s = 4$, $t = 1$. Но от этого решения приходится отказаться, так как в зале больницы находилось «несколько выздоровевших», следовательно, должно быть $t > 1$. Полагаем далее $y = 3$, тогда $6s + t = 20$. Подходит $s = 3$, $t = 2$. Это приводит к тому, что $x = 27$.

Пробуя еще три возможных значения: $y = 4$, $y = 5$ и $y = 6$, легко убедиться в том, что подходящих значений для s и t не получится.

ПРИКЛЮЧЕНИЕ С ДЕЛЕНИЕМ

Пусть x — первоначальное делимое, y — первоначальный делитель, q — частное, r — остаток. По условию $x = q \cdot y + r$. Замена цифры десятков 3 на 8 означает увеличение делимого на 50; соответственно в делителе замена цифры единиц 4 на 9 означает увеличение делителя на 5. Значит, $x + 50 = q(y + 5) + r$. Сопоставляя оба равенства, получаем $50 = 5q$, откуда $q = 10$.

ПРИКЛЮЧЕНИЕ С ЗОЛОТОЙ ЦЕПОЧКОЙ

Пусть рассечено m колечек. После их отделения цепочка распадется на $m + 1$ секций с неодинаковым количеством колечек в каждой. Первая из них — самая короткая секция — должна состоять из $m + 1$ колечек. Эта секция и m рассеченных колечек дадут даме возможность оплатить колечками $m + (m + 1) = 2m + 1$ дней. Вторая — более длинная секция — должна содержать на одно колечко больше, чем $2m + 1$, т.е. $2m + 2 = 2(m + 1)$.

Образуется возможность оплачивать колечками $(2m + 1) + 2(m + 1) = 4m + 3$ дня. Теперь ясно, что следующая по величине секция должна содержать $(4m + 3) + 1 = 2^2(m + 1)$ колечек, и т.д. В самой длинной — $(m + 1)$ -й секции — должно содержаться $2^m(m + 1)$ колечек. Количество колечек в нерасчищенной цепочке равно сумме:

$$\begin{aligned} m + (m + 1) + 2(m + 1) + 2^2(3m + 1) + \dots + 2^m(m + 1) &= \\ = m + (m + 1)(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^m) &= \\ = m + (m + 1)(2^{m+1} - 1). \end{aligned}$$

Если $m = 1$ (одно рассечение), то в цепочке должно быть 7 колечек.

Если $m = 2$ (два рассечения), то 23 колечка.

Если $m = 3$ (три рассечения), то 63 колечка, и т.д.

БЫВАЕТ ЖЕ ТАКОЕ...

1. Из четырех возможных номеров: 2-61-16, 3-61-16, 5-61-16 и 7-61-16 всем условиям удовлетворяет только первый из них.

2. Дом № 54, кв. № 45; $4 + 5 = 9$ и $9 = 54 - 45$.

Пусть искомые цифры x и y , тогда имеем: $10x + y - (10y + x) = x + y$, или $4x = 5y$. Единственное решение: $x = 5$, $y = 4$.

«ДИНАМО» — «РОТОР» — С КАКИМ СЧЕТОМ?

С учетом сообщенных данных нетрудно составить перечень возможных исходов в пятнадцати играх: 1-0, 2-0, 2-1, 3-0, 3-1, 4-0, 3-2, 4-1, 5-0, 4-2, 5-1, 6-0, 4-3, 5-2, 6-1. Только такой перечень обеспечивает наименьшую возможную сумму всех очков: 71.

Например, нельзя было бы пятнадцатой парой предложить 5-3 вместо 6-1, так как $5 + 3 > 6 + 1$.

Те же сведения позволяют распределить исходы между командами в порядке занятых ими мест:

Номер места команды	1	2	3	4	5	6
1	—	5-2	6-1 или 5-1	5-1 или 6-1	6-0 или 5-0	5-0 или 6-0
2	2-5	—	4-3	4-2	4-1	4-0
3	1-6 или 1-5	3-4	—	3-2	3-1	3-0
4	1-5 или 1-6	2-4	2-3	—	2-1	2-0
5	0-6 или 0-5	1-4	1-3	1-2	—	1-0
6	0-5 или 0-6	0-4	0-3	0-2	0-1	—

Сопоставляя таблицу с известными фактами, заключаем: Команда «ЦСКА» на пятом месте, «Локомотив» на шестом, «Торпедо» на третьем, а «Спартак» на первом месте.

Хотя у нас нет достаточных оснований, чтобы определить, какая из оставшихся двух команд заняла второе место: «Динамо» или «Ротор», но исход их встречи определился: 4-2.

ИСТОРИЯ ОДНОГО ЗАНЯТНОГО КОНКУРСА

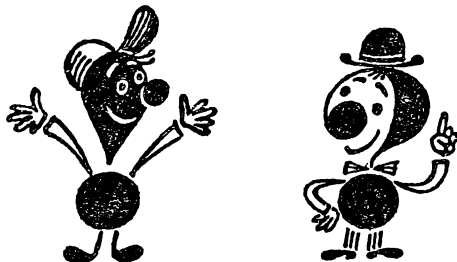
«Изюминка» задачи в том, что в комплекте из 50 пар одинаковых схем не может быть неправильно подобрана только одна пара, так как 49 правильно подобранных пар автоматически ведет к правильному подбору оставшейся пары.

Это значит, что число лиц, приславших комплект только с одной неправильно подобранной парой, равно нулю и, следовательно, число участников конкурса, сделавших ошибки только в трех парах равно 18.

Пусть всех участников конкурса x , из них правильно решивших y . В таком случае число участников конкурса, неправильно подобравших только 2 пары, также равно y . Составляем уравнение:

$$x = 18 + 2y + \frac{98,1}{100} x \Rightarrow \frac{19}{1000} x = 18 + 2y.$$

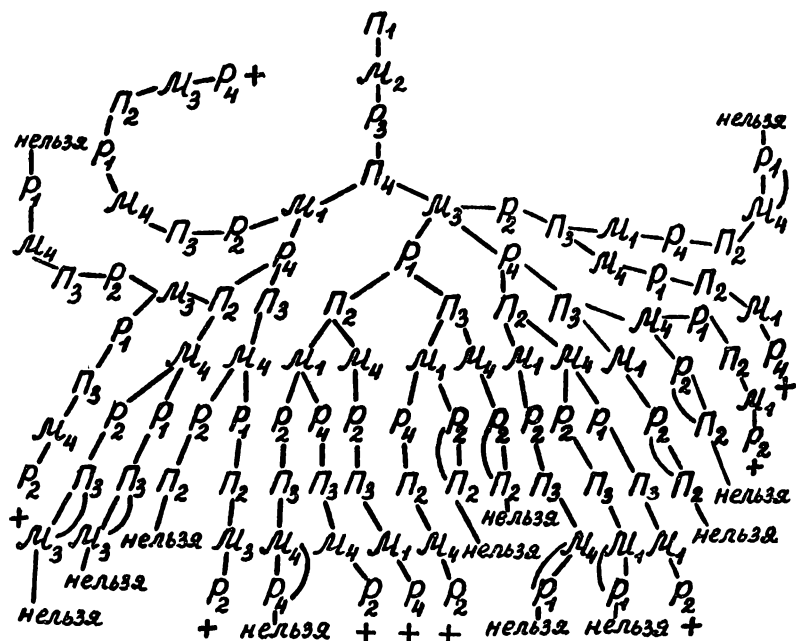
Теперь нетрудно подобрать целые положительные x и y , удовлетворяющие уравнению. Число $18 + 2y$ должно быть равно или кратно числу 19. Ближайшее подходящее значение $y = 10$, тогда $x = 2000$. Следующее подходящее значение $y = 29$, тогда $x = 4000$. Подбор на этом прекращаем, так как уже вторая пара решений не удовлетворяет условию задачи ($x \leq 3000$). Значит, участников конкурса 2000 человек, победителей 10.



КОМБИНАЦИИ СОЗРЕВАЮТ НА ВЕТВЯХ «ДЕРЕВА»

Все случаи, когда Π_1 занимает место № 1 за круглым столом, школьник разбил на три серии по типу чередования первых четырех индексов в начальной последовательности вида $\Pi \ M \ P \ \Pi$:

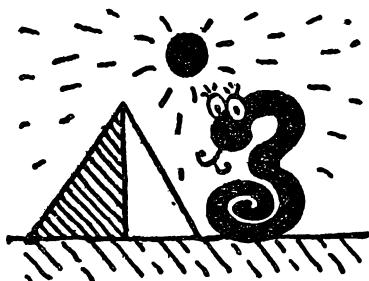
1) все индексы различны, например, в последовательности $\Pi_1 M_2 P_3 \Pi_4$ или $\Pi_1 P_2 M_3 \Pi_4$, $\Pi_1 M_3 P_2 \Pi_4$ или $\Pi_1 P_3 M_2 \Pi_4$ и т.п. — 12 случаев; «дерево» для каждого из них имеет 9 результативных ветвей (см. рис.):

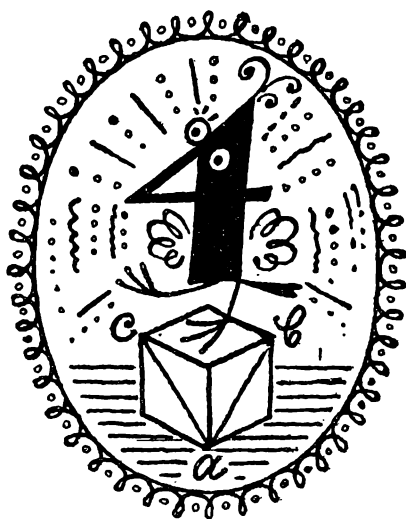


2) одинаковы только первый и третий индексы, например, $P_1M_2P_1P_3$, или только второй и четвертый индексы, например, $P_1M_2P_3P_2$ — 24 случая; у каждого «дерева» 10 результативных ветвей;

3) одинаковы первый и третий, а также второй и четвертый индексы, например, $P_1M_2P_1P_2$ — 6 случаев; у каждого «дерева» 12 результативных ветвей. Всего на трех «деревах» созрело $12 \cdot 9 + 24 \cdot 10 + 6 \cdot 12 = 420$ осуществимых размещений с P_1 , занимающим место № 1 за круглым столом.

Учитывая, что занять место № 1 равноправно претендуют 12 человек, получаем окончательный ответ: $420 \cdot 12 = 5040$ возможных размещений.





ПЛЮС
СМЕРЬ КЪ.

Коль будет тверд и крепок разум,
Все дураки исчезнут разом.

Из кинофильма о М.В. Ломоносове

НАШ СЕМЕЙНЫЙ «БРЭЙН-РИНГ»

Тот, у кого поиск правильного ответа на вопрос или задачу занял не более трех минут, получает 3 очка, не более пяти минут — 2 очка, не более десяти минут — 1 очко.

1. Может ли в какой-либо ситуации $2 + 23$ дать 1?

2. Может ли дробь, у которой числитель меньше знаменателя, быть равной дроби, у которой числитель больше знаменателя?

3. О десяти числах известно, что их сумма равна нулю, а все их попарные произведения (произведения всяких двух чисел из этих десяти) не отрицательны, т.е. либо положительны, либо нули. Что же это за числа такие?

4. Выразите СТО одним числом, используя минимальное количество одинаковых цифр.

5. Выразите СТО, используя ровно 5 (а затем ровно 6, 7, 8 и т.д.) одинаковых цифр и арифметические действия, избегая умножения и деления на 1, записанную дробью вида $\left(\frac{k}{k}\right)^k$ или степенью вида k^{k-k} .

6. Чтобы прочитать текст африканской пословицы, размещившийся в квадрате на с. 145, надо проложить маршрут в форме ломаной линии, симметричной относительно вер-

Ч	Т	,	Ч	Т	О	Д	.
Б	О	Я	Ь	Ы	Б	У	Р
Ы	В	Ы	Л	З	А	Н	Т
Л	З	Р	К	Л	С	Е	Ж
Е	Т	Н	Ы	У	Ж	Н	У
Т	Е	Ж	У	Т	И	,	Е
Ь	Е	Б	Н	Ь	А	Ж	И
В	Н	О	,	У	В	Е	Н

тикальной оси симметрии квадрата. Начальная буква фразы — в левой верхней клетке. Двигаться можно вправо, влево, вверх, вниз, но не по диагоналям клеток.

7. Вавилоняне умели чертить правильный (равносторонний) треугольник. Как вавилоняне произвели бы трисекцию (деление на три равные части) начерченного прямого угла?

8. Неверные равенства: $119119 = 119$ и $12391239 = 1239$ превратите в верные, расставив знаки арифметических действий между цифрами чисел, находящихся слева от знака равенства.

9. Дан треугольник. Если возможно, то проведите прямую так, чтобы она пересекла все три его стороны (но не их продолжения).

10. Напишите какое хотите дробное или целое число, кроме 0 и 1. Обратное ему число отнимите от единицы. Напишите число, обратное получившейся разности и теперь его отнимите от единицы. С новым результатом повторите — в третий раз — цикл указанных действий. После третьего раза непременно получится то число, с которого начинали. Докажите, что так будет с любым числом.

О	О	О	О	О
О	О	О	О	О
О	О	О	О	О
О	О	О	О	О
О	О	О	О	О

11. Выделите на шахматной доске квадрат 5×5 и положите по одной монете (шашке, пуговице) на каждую клетку (рис. вверху). Из них 10 монет вы можете взять себе, сняв их с доски так, чтобы осталось в каждом ряду, каждом столбце и каждой диагонали квадрата только по 3 монеты.

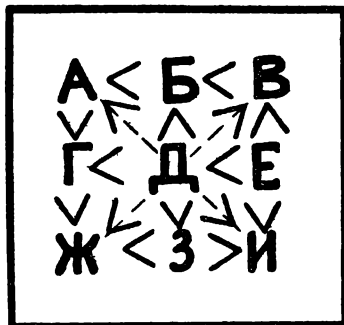
12. Требуется построить четырехугольник и пересечь его прямой так, чтобы получилось 4 треугольника. Сможете?

13. Используя 9 однозначных чисел, замените ими буквы (рис. внизу) так, чтобы все неравенства по горизонталям, по вертикалям и по диагоналям были верными.

14. Тест состоит из 28 вопросов. За каждый правильный ответ начислялось 8 очков, за каждый неправильный — отнималось 5 очков. В результате оказалось, увы, 0 очков.

Сколько было правильных ответов?

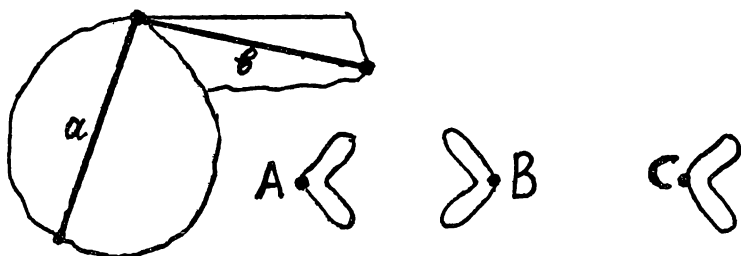
15. В записи числа 41096278 зачеркните 4 цифры, чтобы образовавшееся число оказалось четвертой степенью некоторого целого числа.



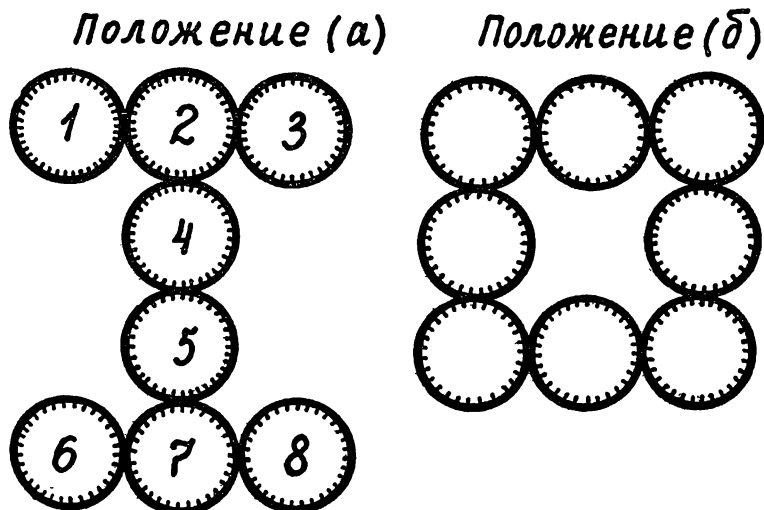
16. Сумма длин всех диагоналей любого выпуклого пятиугольника меньше удвоенного его периметра. Придумайте простейшее доказательство.

17. Напишите 20 четырьмя девятками.

18. Взглянув на рисунок, скажите, какой отрезок длиннее: a или b . Где больше расстояние — между точками A и B или B и C ?

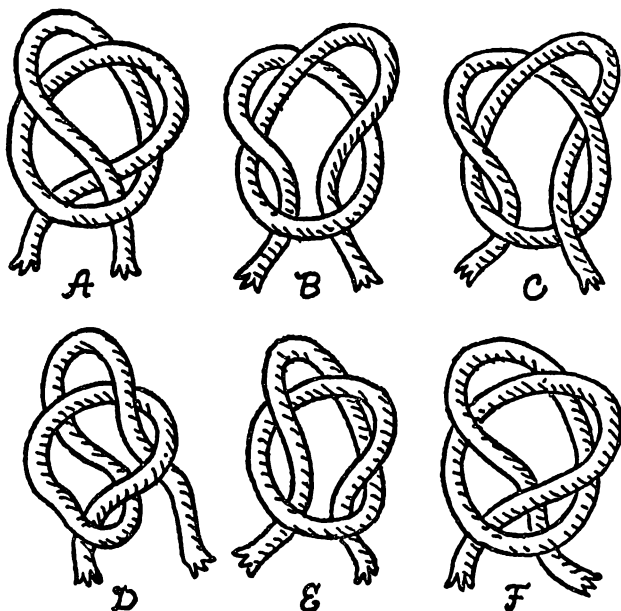


19. Образована фигура из восьми одинаковых монет (см. рис.). Перемещая по одной, требуется перевести их из



положения (а) в положение (б), совершая наименьшее количество движений. Движение состоит в скольжении по плоскости одной монеты, остающейся при этом в непрерывном соприкосновении с другими монетами, и без разрушения сцепленности остальных семи монет. Решение будет принято, если добьетесь его за 5 движений, т.е. перемещением только пяти монет.

20. Составлено 6 петель из кусков веревки (см. рис.). Если потянуть правой рукой за один из свободных концов



веревки, а левой — за другой, то либо петля распадется и веревка «распряжится», либо образуется узел. Посмотрев внимательно на рисунок, представьте эту процедуру «в уме» и скажите, какие из петель затянутся в узлы.

21. Ребро куба равно 666 мм. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребро увеличить на 666 мм?

22. Найдите два варианта такого расположения семи монет на столе в два ряда: 4 монеты в одном, 3 — в другом, чтобы передвинув одну монету, не трогая остальных, в каждом ряду оказалось по 3 монеты.

23. Еще не в очень отдаленные времена в России были в употреблении монеты достоинством в 10 копеек (гривенники) и — из того же сплава, но вдвое большей массы — достоинством в 20 копеек (двугривенные). Что дороже: килограмм гривенников или полкилограмма двугривенных?

24. Вопрос издавека — через века, поэтому игнорируйте несоответствие цен нашей реальности: рассказывают, что было куплено 100 голов домашнего рогатого скота на 100 р. по цене 5 р. за одну корову, 1 р. за овцу и один гривенник $\left(\frac{1}{10} \text{ р.}\right)$ за одного поросенка. Сколько было куплено коров, овец и поросят?

25. Сколько членов гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$ надо сложить, чтобы сумма S_n как можно ближе подошла бы к числу 10? Какой ответ подсказывает ваша интуиция: 100 слагаемых, или 1000, или 10000, или еще больше?

26. Из цифр 1, 2, 7 можно составить 6 трехзначных чисел. Из них самое меньшее $127 = 7^3 - 6^3$, самое большее $721 = 16^3 - 15^3$. Из остальных четырех — какие два не могут быть представлены разностью кубов двух последовательных натуральных чисел, и какие два — могут? Представьте их разностью кубов!

27. Напишите двойку пятью тройками не менее чем двумя способами.

28. За 2—3 минуты, не пользуясь вычислительными приборами, упростите дробь

$$\frac{1234567890}{234567891^2 - 234567890 \cdot 234567892}.$$

29. Который час в тот момент времени, когда часовая стрелка, находясь между точками II и III циферблата, удалась от XII настолько же, на сколько минутная стрелка не добралась до точки VI?

30. Сколько времени прошло от начала суток, когда впервые минутной стрелке, чтобы достигнуть точки XII, надо повернуться на угол, равный углу, на который передвинулась часовая стрелка?

31. Придумайте два неравных числа таких, что сумма квадрата первого числа и второго была бы равна сумме квадрата второго числа и первого.

32. Возможно ли начертить два прямолинейных отрезка, имеющих более одной общей точки?

33. Возьмите 4 монеты и расположите их на поверхности стола вдоль двух воображаемых прямых линий по 3 монеты на каждой из них. Удалось?

34. В каком треугольнике середины трех высот принадлежат одной прямой?

35. Если в декабре 20** года — 4 воскресенья и 4 пятницы, то в полночь какого дня недели будет встреча Нового Года? Определите и год этот, зная, что он принадлежит первому десятилетию XXI века.

36. Квадрат какого числа имеет вот такой «пестрый хвост»:

... 987654321?

37. Есть только одно двузначное число, куб которого оканчивается двумя семерками. Какое это число?

БРАЧНЫЕ ПАРЫ ЗА КРУГЛЫМ СТОЛОМ

Александр с женой Александрой, Виктор с женой Викторией и Евгений с женой Евгенией так разместились за круглым столом, что ни Александр, ни Виктор не сидели рядом со своими женами и ни один муж не сидел напротив своей жены. Александра села рядом с Виктором, справа от него, а Александр оказался между двумя дамами. Кто же сидел рядом с Евгенией справа и слева?

ЧЕРНАЯ ИЛИ РЫЖАЯ?

4 коровы черной масти и 3 — рыжей масти за 5 дней дали такой же надой молока, как 3 коровы черной масти и



5 рыжей за 4 дня. Какие коровы более молочны: черной или рыжей масти?

ВСТРЕЧА БЫЛА КОРОТКОЙ

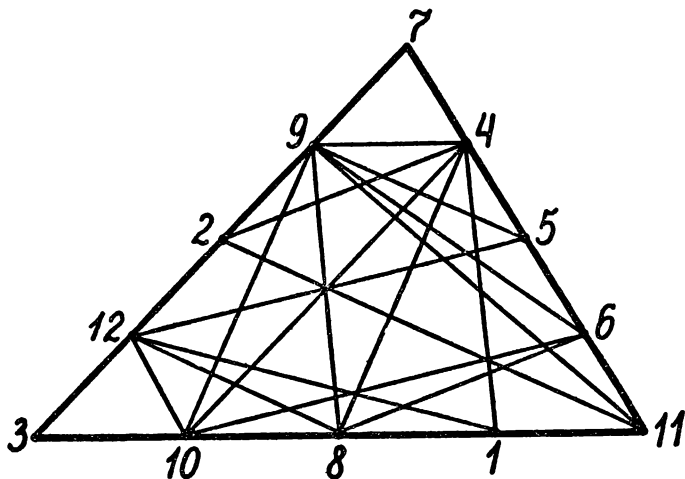
Два товарных поезда, оба длиной по 250 м, идут навстречу друг другу с одинаковой скоростью 60 км/ч. Сколько секунд пройдет после того, как встретились машинисты, до того, как встретятся кондукторы последних вагонов.

ЗДРАВЫЙ СМЫСЛ ПЛЮС СМЕКАЛКА

Это все, что надо, чтобы выяснить в одно действие: какое расстояние преодолеет гидросамолет, вылетевший с заданием догнать теплоход, отправившийся в дальний морской рейс. Известно, что к началу полета гидросамолета, теплоход отошел от берега на 180 миль и продолжает удаляться со скоростью в 10 раз меньшей скорости догоняющего его самолета.

ВЕНОК НЕ ИЗ РОМАШЕК И ВАСИЛЬКОВ...

И не круглый, а треугольный (см. рис.). И сплетают его из дюжины натуральных «цветочков»: 1, 2, ..., 11, 12, размещаемых по 5 штук на каждой стороне треугольного венка, да так умело, что образуется одна и та же «магическая» сумма (S). В поисках решения этой занимательной



головоломки, поместил я в вершинах треугольника любимые числа Германа (из «Пиковой дамы»): тройку, семерку и туз, простите, не туз, конечно, а его эквивалент. — число 11. Вычислил, что в этом случае магической суммой обязано быть только число 33. (Сообразите, как я это установил?) И далее легко подобрал один из возможных вариантов размещения остальных чисел на сторонах треугольника:

$$\begin{aligned} 3 + 12 + 2 + 9 + 7 &= 7 + 4 + 5 + 6 + 11 = \\ &= 11 + 1 + 8 + 10 + 3 = 33. \end{aligned}$$

Внутренние «веточки» (тонкие отрезки на рисунке), вместе со сторонами или частями сторон треугольника,

образуют 8 вписанных (лучше сказать — вложенных) четырехугольников с той же магической суммой ($S = 33$) чисел, расположенных в их вершинах:

$$\begin{aligned} 12 + 9 + 11 + 1 &= 12 + 2 + 11 + 8 = 12 + 7 + 4 + 10 = \\ &= 12 + 5 + 6 + 10 = 12 + 9 + 4 + 8 = 12 + 7 + 6 + 8 = \\ &= 11 + 8 + 9 + 5 = 10 + 9 + 6 + 8. \end{aligned}$$

А теперь 5 задач для вашего развлечения:

1. Докажите, что в заданной головоломке наименьшая возможная магическая сумма $S_{\text{наим.}} = 28$, наибольшая — $S_{\text{наиб.}} = 37$.

Достижимы и все промежуточные натуральные значения S .

2. Сохраняя 3, 7, 11 в вершинах треугольного венка, перераспределите остальные числа так, чтобы образовалась магическая сумма $S = 33$ на его сторонах и в вершинах не менее чем одиннадцати вложенных четырехугольников.

3. Сохраните в двух вершинах треугольного венка тройку и семерку, а в третью вершину вместо «туза» поместите «даму пик», оценивая ее единицей, и вы еще раз убедитесь в коварстве этой «дамы»: заданная головоломка становится неразрешимой, то есть теперь невозможно добиться единой магической суммы. Почему?

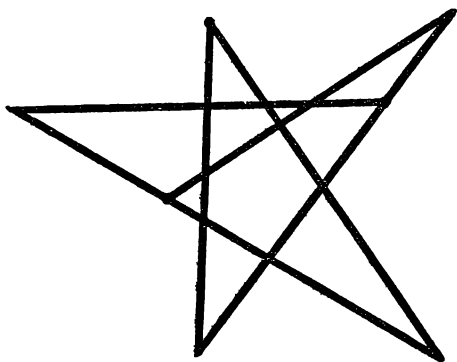
4. Повысьте оценку «дамы» всего лишь на единицу, головоломка возродится и наградит вас «круглой» магической суммой $S = 30$. Почему?

5. Если в вершинах треугольника разместите 3, 4 и 5, то вам будет обеспечена та же магическая сумма $S = 30$. Почему? — ответить легко. Суть же «завлекалки» здесь в поиске такого варианта расположения чисел по сторонам треугольника, при котором образовалось бы 19 вложенных четырехугольников с такой же магической суммой $S = 30$ в вершинах каждого из них.

Не рекордное ли это число — 19 вложенных четырехугольников — для всего множества решений нашей «завлекалки» на сплетение треугольных венков из двенадцати заданных чисел? Скорее всего — да!

ПОДСЧИТАТЬ НЕ ПЕРЕСЧИТЫВАЯ

Одним росчерком пера проведены 6 отрезков так, что каждый пересекается с каждым, и нет трех пересечений в одной точке.



Сколько треугольников содержится в образовавшейся фигуре?

— Нет проблем, — по-модному ответит кто-то, — возьму да и пересчитаю их один за другим!

Но, ведь, «высвечивание» треугольников из нарисованного «кружева линий» — такое канительное, скучное, ненадежное занятие: пропустить можно — не разглядев и дважды сосчитать один и тот же треугольник... Информация, содержащаяся в данном тексте задачи, достаточна, чтобы, даже не глядя на рисунок, подсчитать с безупречной надежностью, сколько же треугольников должно образоваться при изложенном условии пересечения шести отрезков.

СЕКУЩАЯ ШАХМАТНУЮ ДОСКУ

Какое наибольшее количество клеток шахматной доски, содержащей 64 клетки, может пересечь произвольно проведенная секущая прямая линия?

ДВОЙКА В ГОЛОВОЛОМКЕ

Используя только двойку и только одно действие, запишите пятизначное число, первая и последняя цифра которого 6.

ВСЕ ЦИФРЫ В ГОСТИ К НАМ...

Ученица 7-го класса Света Богина обнаружила в моей книге «Математическая смекалка» задачу, в которой сообщается, что есть такое 10-значное число с неповторяющимися цифрами, при делении которого на 9 получается в частном палиндромическое число, т.е. читающееся одинаково как слева направо, так и справа налево, и вопрос: «Удастся ли вам найти его?». Сразу вспыхнуло желание непременно отыскать это таинственное число. Удача! Вот оно:

$$6859721403 : 9 = 762191267.$$

Заглянула Света в раздел «Решения» и ахнула — там другое число:

$$4938271605 : 9 = 548696845.$$

Значит, искомое число не одно? Теперь их два! А может быть и еще обнаружатся?

Письмом сообщила мне о своем открытии. Похвалил я Свету и посоветовал продолжить «раскопки» на множестве десятизначных чисел с неповторяющимися цифрами, не смущаясь тем, что таких чисел больше трех миллионов. В школе узнали о моей переписке со Светой, и что тут

началось! ... Поисками столь заманчивых «трофеев» «заболели» чуть ли не все учащиеся школы, и настолько увлеклись этой задачей, сообщает мне учительница математики, что «готовы решать ее на всех уроках». Изыскания принесли плоды.

Школьники «селекционировали» более 120 чисел, удовлетворяющих требованиям задачи. Наибольшее из найденных ими:

$$8706543921 : 9 = 967393769 \text{ (Володя Григорьев, 8-й класс);}$$

наименьшее:

$$1206453879 : 9 = 134050431 \text{ (Олег Юшинов, 8-й класс).}$$

Возникает новая задача: обнаружить еще большие и еще меньшие, чем эти, найденные ребятами.

Стремясь «сотворить» как можно больше требуемых чисел, юные «селекционеры» выявили занятные закономерности, позволявшие легко трансформировать уже найденные числа в другие, удовлетворяющие требованиям задачи:

1. Пусть найдено требуемое число n такое, что $n : 9 = m$ палиндромическое. Если 4-я и 6-я цифры числа m — нули, а стоящая между ними цифра не равна 1, то, обменяв местами 5-ю и 6-ю цифры числа n , получим еще одно искомое число. (Тимур Кузьмин, 7-й класс.)

Пример. Найдено: $4059721386 : 9 = 451030154$ и $8523096741 : 9 = 947010749$. Взглянув на правые части этих равенств и доверяя открытию Тимура, сразу заключаем, что 4059271386 — также искомое число, а 8523906741 — нет. Убедитесь!

2. Почти всякое (но отнюдь не каждое) найденное 10-значное число способно к саморазмножению, то есть к превращению в другое искомое число при совместном обмене местами 1-й цифры с 2-й и 9-й — с 10-й, или 3-й с 4-й и 7-й с 8-й или — всех упомянутых пар сразу. (Альберт Латышев, 7-й класс.)

Пример. Число 5832097614 — искомое, то есть удовлетворяет заданным требованиям: $5832097614 : 9 = 648010846$. Оно порождает еще три искомых числа:

8532097641 (обменялись местами цифры 1-я с 2-й и 9-я с 10-й),

5823096714 (обменялись местами цифры 3-я с 4-й и 7-я с 8-й),

8523096741 (обменялись местами цифры 1-я с 2-й и 9-я с 10-й, 3-я с 4-й и 7-я с 8-й).

Некоторые из юных «селекционеров» добивались успеха, решая задачу «с конца». Сначала формировали наугад 9-значное палиндромическое число с произвольной цифрой в центре записи числа, затем умножали его на 9. Если не получалось должного результата, то есть не пожаловали «в гости» к 10-значному числу все 10 цифр, то заменяли исходное число другим.

Ребус 1. Шустрик придумал 9-значное число с неповторяющимися цифрами, в результате умножения которого на 2 или на 4, на 5 или на 7, на 8 или на 10 всякий раз образуется какое-нибудь 10-значное число также с неповторяющимися цифрами.

Затем Шустрик заменил точками 6 цифр и теперь предлагает восстановить полную цифровую запись числа: 9 ... 5 ... 1.

Ребус 2. Пусть исходное 9-значное палиндромическое число имеет вид: ... 020 ... или ... 090 ...

Попытайтесь в каждом заменить точки цифрами так, чтобы в результате умножения на 9 получилось 10-значное число с неповторяющимися цифрами. (Без ответа.)



С ТРЕТЬЕЙ ПОПЫТКИ Я УГАДАЛ...

— Как распределились первые 5 мест между гимнастами А, Б, В, Г, Д в недавних соревнованиях?

Истинного распределения мест я не знал и сказал наугад:

— В алфавитном порядке:

места	1	2	3	4	5
заняли	А	Б	В	Г	Д

(1)

Оказалось, что ни одного гимнаста я не поставил правильно на то место, которое было занято им в действительности. Кроме того, в действительности нет алфавитной последовательности имен для любых двух, занимающих соседние места, т.е. Б не следует непосредственно за А, В — за Б, Г — за В и Д — за Г.

Тогда, учитывая последнее замечание, я предположил другую расстановку имен:

места	1	2	3	4	5
заняли	Г	А	Д	В	Б

(2)

Теперь, как заявили мне, я ближе к истине: для двух соседних мест (каких?) имена гимнастов соотнесены правильно.

Поразмыслив еще немного, я, на этот раз, поставил каждого гимнаста на действительно занятое им место. Каково истинное распределение мест и как я рассуждал?

КАК ПОМОЛОДЕТЬ ГОРОДУ?

Предположим, что средний возраст города определяют следующим образом: складывают возрасты всех домов и полученный результат делят на общее количество домов.

Выясните, отчего больше помолодеет город: оттого, что снесут старый дом или оттого, что построят новый дом. Для простоты считайте, что можно снести и построить дом за одинаковое время.

НЕУДАВШЕЕСЯ УТАИВАНИЕ ВОЗРАСТА

Попытка первая. Сейчас Анне и Еве вместе 86 лет. Возраст Анны составит $\frac{15}{16}$ возраста Евы тогда, когда возраст Анны составит $\frac{9}{16}$ возраста Евы тогда, когда Ева станет вдвое старше Анны тогда, когда Анна стала бы вдвое старше Евы. Размотайте этот хитроумно сплетенный клубок возрастных отношений.

Попытка вторая. Возраст девочки, имеющей целое число лет, увеличенный на 3 года дает точный квадрат, а уменьшенный на 3 года, дает квадратный корень из упомянутого квадрата.

Здесь утайка возраста примитивна и каждый легко его выявит, составив квадратное уравнение с одним переменным, а при желании, — чисто арифметически. Но... мобилируйте свою смекалку на поиск эффектного — «эмпирического» решения, т.е. «по здравому смыслу».

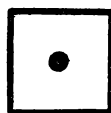
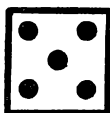
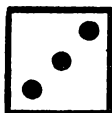
Свое решение сопоставьте с нашим (см. с. 186).

ЭФФЕКТНЫЙ ФОКУС С ИГРАЛЬНЫМИ КУБИКАМИ

Фокусник приглашает тайно от него бросить на стол три игральных кубика, сблизить их в один ряд, и обещает угадать число пятнышек, объявившихся на верхней грани первого, второго и третьего кубиков. Предварительно он просит написать эти числа подряд и приписать еще три числа, определяемые количеством пятнышек на нижних гранях кубиков в том же порядке их следования.

Образуются шестизначное число. Фокусник предлагает разделить это число на 111 и сообщить ему частное.

Например, пусть картинка верхних граней брошенных кубиков такова:



С приписанными числами (из нижних граней) образовалось число 351426. Разделили на 111 и сообщили фокуснику результат: 3166. Фокусник заявляет: объявившиеся на верхних гранях кубиков числа 3, 5 и 1.

Секрет фокуса. Из объявленного числа фокусник всегда вычитает 7, разность делит на 9. В частном получится трехзначное число, цифры которого — искомые (в данном примере 3, 5 и 1).

Кто-то из вас ограничится лишь показом фокуса друзьям, а кто-то придумается и над его математическим обоснованием. В помощь «ищущим» напомним, что у «законного» игрального кубика сумма чисел пятнышек на каждой паре взаимно противоположных граней обязательно равна семи. Теперь, привлекая алгебраическую форму записи числа, завершите доказательство того, что угадывание будет безошибочным всегда.

СЕКУНДЫ, СЕКУНДЫ, СЕКУНДЫ...

Сколько секунд в секунду проходит секундная стрелка часов?



ВЕЧНОЕ КРУЖЕНИЕ ЧАСОВЫХ СТРЕЛОК

Четыре «стихозапевалки» и наши «завлекалки»

Первая:

Бьют часы
В полночный час
12 раз.
Бьют часы
В полночный час
Да не для нас.

Из песни по радио

На часах ровно 9. Через сколько минут часовая и минутная стрелки совпадут?

Вторая:

Идут часы, идут часы,
Старинные часы.
Висят две стрелки, как усы
У них не для красоты.

А. Дольский

Стрелки часов только что совпали. Через сколько минут они будут «смотреть» в противоположные стороны?

Третья:

Звучно стрелка часовая
Мерный круг свой совершит
И докучных удаляя
Полночь нас не разлучит.

А.С. Пушкин

Сколько раз в течение суток минутная и часовая стрелки часов образуют прямой угол? Сколько времени (с точностью до одной минуты) показывают часы, когда стрелки образуют прямой угол:

а) первый раз после полуночи; б) последний раз в сутках?

Четвертая:

Покуда ты глядишь на нас,
Определяя точный час,
Учти, что время в свой черед
Успело убежать вперед.

М. Ванни (Италия)

Уходя плавать, Павлик на оставленных дома часах заметил положение стрелок.

— Обед будет ровно через 2 часа, не опаздывай, — сказала мама.

Но Павлик все-таки опоздал к обеду, правда, меньше, чем на час, а взглянув на часы, обнаружил, что за прошедшее время стрелки часов поменялись местами.

На сколько минут Павлик опоздал к обеду?



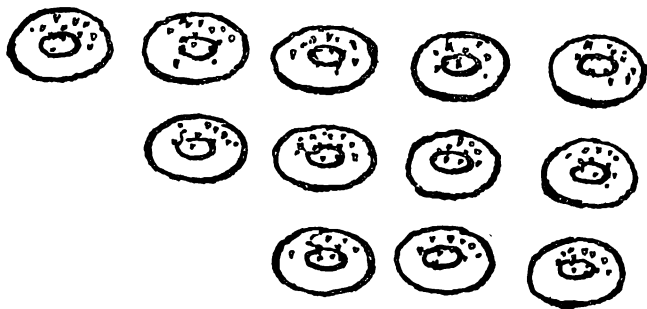
Я НЕ ХОЧУ БРАТЬ ПОСЛЕДНИЙ ПОНЧИК

Недавно появилась трещинка в нашей дружбе — Егора со мной. Каждому хотелось безраздельно пользоваться привилегией приглашать Иру — дочь буфетчицы Клавдии Ивановны, в кино, на танцы, на лыжную прогулку. Клавдия Ивановна решила вмешаться в конфликт и помочь нам «разрубить Гордиев узел». Заметив, что всякий раз, когда в буфете есть пончики, мы берем их к чаю, она принесла 12 пончиков, разложила их в три ряда (см. рис.) и предложила нам брать поочередно любое количество пончиков, но всякий раз только из одного ряда.

— Я соглашусь отпустить Иру с тем из вас, — с веселой хитринкой заявила Клавдия Ивановна, — на долю которого не достанется последний пончик, любой из этих двенадцати.

Если бы вы знали, как мне хочется оказаться победителем в этой «борьбе стратегий», придуманной Клавдией Ивановной. Но возможно ли это? Должен ли я стремиться первым брать пончики, или мне выгоднее быть вторым? Можно ли найти такую стратегию, придерживаясь которой я всегда избегну необходимости взять последний пончик?

Как мне надо действовать? Впрочем, я не прошу помощи или подсказки.



КАКОЙ КОЛОСС КОЛОССАЛЬНЕЕ?

Который 63^9 или который 33^{11} ?

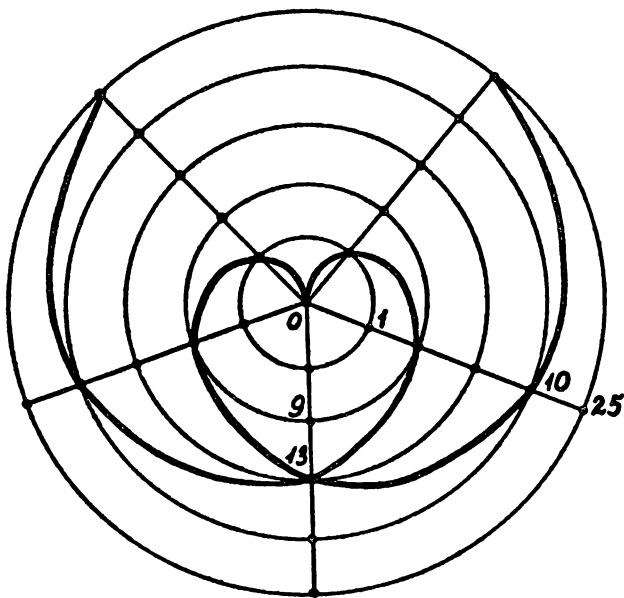
ТАЙНЫ ПОСЛЕДНЕЙ ЦИФРЫ

Первая. Может ли сумма чисел натурального ряда $1 + 2 + \dots + k$ при каком либо значении k оканчиваться цифрой 7?

Вторая. Докажите, что числа 207^{208} и 209^{210} оканчиваются одной и той же цифрой. Какой?

МАГИЧЕСКИЕ СПИРАЛИ И ОКРУЖНОСТИ

Пять concentрических окружностей и пять лучей (см. рис.), делящих каждую окружность на равные части,



образуют 25 точек пересечения. Эти точки были занумерованы так ловко, что образовалось 12 одинаковых сумм из номеров, расположенных вдоль каждой из пяти окружностей, каждого из пяти лучей-радиусов и каждой из двух архимедовых спиралей, начинающихся из центра *O*.

На рисунке спирали «закручены» в противоположных направлениях и имеют общую точку с присвоенным ей номером 13. Остальные номера точек, кроме еще четырех: №№ 1, 9, 10 и 25, исчезли при невыясненных обстоятельствах.

Надеюсь на ваше участие в реставрации номеров на их должных местах. Но предварительно рассчитайте, какой должна быть магическая сумма, повторяющаяся 12 раз.

ПО ЦВЕТУЩЕМУ ЛУГУ

Шли, беседуя, старичок-моховичок и более молодой спутник.

— Люблю, Василий Васильевич, вот такую абсолютную тишину и спокойствие в природе.

— Да!... Хорошо, Петр Петрович. Только беспрерывно стрекочут кузнечики, да зудят комары, — надоедают!

К концу прогулки, старший из них внезапно озадачил своего собеседника таким вот стишком:

Раз в восемь старше я, чем были Вы в момент,
Когда я был такой, каким теперь Вы стали...
Прошу, найдите отношение наших лет.
(И калькулятор нужен Вам едва ли?!)

А в самом деле: каково отношение их лет?

И еще вопрос: кто из них более молодой — Василий Васильевич или Петр Петрович?

ГАРМОНИЯ СИММЕТРИИ

Расставьте на шахматной доске 24 шашки симметрично относительно главной диагонали (из черных полей) так, чтобы на каждой горизонтали и каждой вертикали стояло по 3 шашки. Ставить шашки на главную диагональ запрещается.

ТРИ КВАРТЫ, ТРИ КВАРТЫ...

Это — не искажение классического восклицания Германа: «Три карты, три карты», а просто «кулинарная» головоломка по приготовлению только из ТРЕХ четверок (4, 4, 4 — «три кварталы») каждого из последовательных натуральных чисел с использованием знаков арифметических действий, радикала ($\sqrt{}$) и факториала (!). Последние два знака это — маскировка чисел 2 и 24, так как $\sqrt{4} = 2$ и $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Первые 6 «квартиков» готовятся легко:

$1 = (4 : 4)^4$
$2 = (4 + 4) : 4$
$3 = 4 - 4 : 4$
$4 = 4 + 4 - 4$
$5 = 4 + 4 : 4$
$6 = 4 + 4 - \sqrt{4}$

На «выпечке» седьмого (числа 7) и девятого (числа 9) — споткнемся. Убедитесь!

И вот тут в самый раз вспомнить о десятичной и периодической дробях: $0,4$ и $0,(4) = \frac{4}{9}$, изменив форму их записи

на «американский фасон»: $0,4 = .4$ и $0,(4) = .\dot{4}$.

Этот маленький «трюк с точками» для маскировки дробей позволяет продолжить, с большей или меньшей изобретательностью, приготовление последующих «квартиков»:

$$\begin{array}{l}
 7 = (4 : .4) - \sqrt{4} \\
 8 = 4 + \sqrt{4} + \sqrt{4} \\
 \dots\dots\dots \\
 16 = (4 + 4)\sqrt{4} \\
 \dots\dots\dots \\
 19 = 4! - \sqrt{4} : .4 \\
 \dots\dots\dots \\
 30 = 4! + 4 + \sqrt{4}
 \end{array}$$

Числа из промежутка [7; 30], отсутствующие в нашей табличке, изобразите «квартиками» в своей тетради, но не пытайтесь изготовить «квартик» для числа 17 — не выйдет!

Число 17, затем 31, 41, 43 и ряд других вернуть в семейство «квартиков» удалось известному английскому проблемисту W.W. Rouse Ball'у с помощью еще одного забавного математического символа, называемого субфакториалом: $!n = \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \pm \frac{1}{n!}\right) \cdot n!$

$$\text{В частности: } !4 = \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) \cdot 4! = 9.$$

Теперь имеем:

$$17 = 4 + 4 + !4, \dots, 31 = 4! + !4 - \sqrt{4}, \dots, 41 = 44 - \sqrt[4]{4}, \dots$$

Благодаря творческой смеалке Rouse Ball'a «три кварты» оказались достаточным материалом для изображения в виде тройки «квартиков» всех целых обитателей промежутка [1; 90].

Получилось куда более живописное «полотно» из троек «квартиков», чем картина Казимира Малевича всего лишь с одним черным «квадратиком».

Оно воспроизведено на с. 193, но прежде поупражняйте собственную смекалку. Не исключено возникновение у вас и иных «форм» для тех же чисел.

«УЛИК» ДОСТАТОЧНО

$$\begin{array}{r}
 2 ** \\
 \underline{3 **} \\
 5 ** \\
 * 4 * \\
 \underline{** 3} \\
 * * * * *
 \end{array}$$

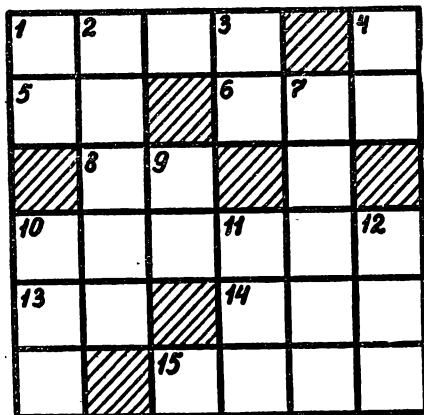
Сохранившихся «улик» совершенного действия, как видим, маловато, но достаточно, чтобы восстановить все цифры, замененные звездочками.

Легко сообразить, какие цифры являются последними в записи трехзначных сомножителей. (Какие же?).

При поиске средних цифр обнаружатся два подходящих варианта.

Оставьте тот, где в записи окончательного результата умножения содержится только одна нечетная цифра.

КРОСС ЧИСЕЛ



По горизонтали:

1. Квадрат простого числа.

5. Половина наибольшего общего делителя чисел № 10 и № 11 по вертикали.

6. Куб натурального числа.

8. Квадратный корень из № 1 по горизонтали.

10. Квадратный палиндром. (Палиндром — число, цифры которого, расположенные

слева от середины записи числа, повторяются справа в обратном порядке, например, как у числа 381183.)

13. На 1 больше числа в № 9 по вертикали.

14. Пятикратно увеличенное в № 8 по горизонтали.

15. Квадрат числа, следующего за числом из № 13 по горизонтали.

По вертикали:

1. Произведение числа 17 на другое простое число.

2. Сумма всех пяти цифр равна 29.

3. Простое число.

4. Простое число — делитель числа в № 11 по вертикали.

7. Произведение чисел в №№ 13 и 15 по горизонтали на 0,4.

9. Удвоенное из № 4 по вертикали.

10. Цифры следуют в порядке, обратном порядку следования тех же цифр в № 11.

11. Квадратный корень из № 10 по горизонтали.

12. Результат произведения некоторого числа на наибольший простой делитель № 13 по горизонтали.

Рекомендация. Отыскание требуемых чисел станет увлекательной игрой — размышлением, если сразу же обратите внимание на № 10 по горизонтали. Успешно завершённый поиск этого числа несомненно доставит радость хотя бы потому, что в семействе шестизначных точных квадратов оно — единственно возможный палиндром. Его определившиеся цифры дадут импульс к отысканию чисел № 10 и № 11 по вертикали. Следом за ними без особых усилий возникнут № 4 и № 9 по вертикали, а так же № 13, № 15 и № 5 по горизонтали. Затем легко определится № 1 по вертикали и № 1 и № 8 по горизонтали.

Полностью завершив эту забаву, сравните свой результат с нашим ответом (с. 194).

ПРИДУМАЙТЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ

Взамен чисто арифметического или алгебраического способа решения одной производственной задачи: 27 одинаковых механизмов могут выполнить определенное задание за 35 ч непрерывной работы. Но через 11 ч к выполнению этого задания подключились еще несколько таких же механизмов, и работа была закончена на 6 ч раньше. Сколько механизмов было подключено дополнительно?

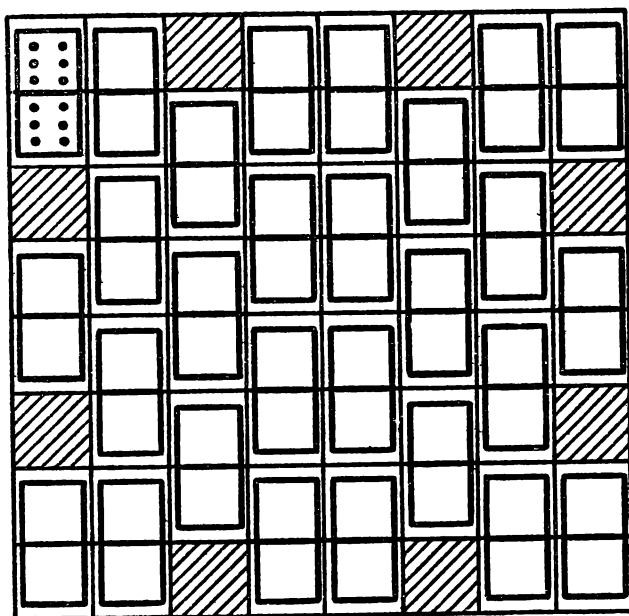
ИГРАЕМ В «ОЧКО»...

С самим собой и полным комплектом белых плиток домино с черными точками или — черных с белыми точками.

Разместите на незаштрихованных клетках квадрата 8×8 плитки домино так, чтобы суммарное количество точек вдоль каждой из восьми горизонталей, из восьми вертикалей и двух диагоналей, а так же в четырех вершинах квадрата составило «очко» — так игроки в карты называют число 21. Плитку

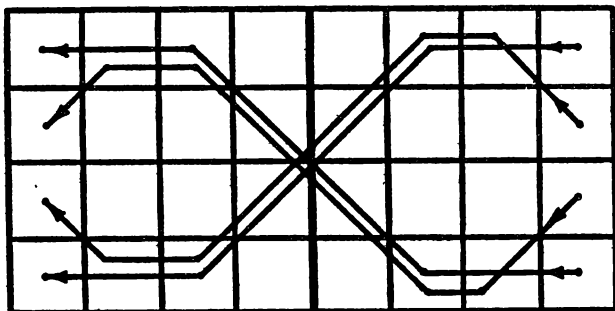
6	6
---	---

 можно, например, «поставить в угол».



В ТЕСНОЙ БЛИЗОСТИ ДРУГ К ДРУГУ...

Парочка квадратов (4×4) прибыла из г. Дебальцево (Донбасс) с тайным желанием стать единым магическим прямоугольником (4×8).



И это — дело вашей компетенции: надо разместить в его ячейках 32 порядковых числа (1 — 32) так, чтобы магическая сумма $S_1 = \frac{1+32}{2} \cdot 4 = 66$ образовалась: а) в каждом из двух сомкнувшихся квадратов отдельно по строкам, столбцам и диагоналям (всего 20 раз); б) в четырех ячейках каждого из восьми квадратов (2×2) (всего 8 раз).

Одновременно должна образоваться вторая магическая сумма $S_2 = 2S_1 = 132$ вдоль каждой из четырех ломаных, отмеченных на рисунке.

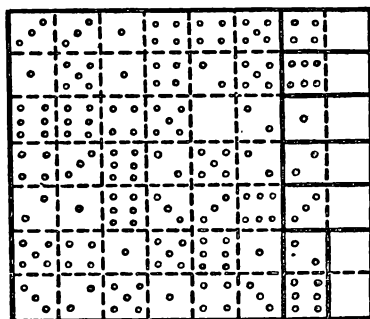
Легко выявятся в заполненном прямоугольнике и другие ломаные с той же магической суммой $S_2 = 132$.

МАГИЯ НА ПЛИТКАХ ДОМИНО

1. 28 плиток домино — это 28 пар чисел; в условной записи: 0-0, 0-1, 0-2, ..., 0-6, 1-1, 1-2, ..., 6-6. Всего 56 чисел. Из них, приставляя плитку к плитке по правилам игры в домино, я выложил цепочку в форме квадратной рамки — по 7 плиток вдоль каждой стороны. При этом сумма очков вдоль каждой стороны рамки оказалась одинаковой, равной 44.

На рисунке слева показаны сформированными только 4 уголка магической рамки. Найдите надлежащие места вдоль сторон рамки (вместо точек) для остальных двадцати плиток домино.

2. Из 28 плиток домино можно составить не только магическую рамку, но и магический квадрат по 7 чисел в каждой строке и каждом столбце. Будет задействовано $7 \times 7 = 49$ чисел. Но плитки домино презентуют нам 56 чисел. Получается 7 чисел лишних. Не разламывать же плитки?! Выручает собственная смекалка. Разместим плитки так, что в последнем, ненужном — восьмом столбце (рис. справа) окажутся нули (пустые половинки плиток).



Сумма очков в седьмом столбце равна 24. Эта сумма должна повториться в остальных столбцах (кроме нулевого), в семи строках и двух диагоналях.

Теперь, либо не глядя на рисунок справа, составьте самостоятельно магический квадрат 7×7 из плиток домино, либо, упрощая для себя задачу составления магического квадрата, пристраивайте к показанным на рисунке справа семи плиткам остальные 21, рассматривая 42 числа в левой части рисунка как завуалированную подсказку искомого расположения плиток. Совпадет ли ваше решение с ответом на странице 197?

МОЗАИКА ИЗ РАЗНОЦВЕТНЫХ КВАДРАТИКОВ

Приготовьте четыре комплекта разноцветных квадратиков одного размера, но четырех различных окрасок — желтой, черной, красной и синей — по четыре квадрата каждой окраски. На каждом квадратике первого комплекта напишите цифру 1, на каждом квадратике второго комплекта — цифру 2, на квадратиках третьего комплекта — 3 и на квадратиках четвертого — 4. Надо расположить эти 16 разноцветных квадратиков в виде квадрата, причем так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждой из двух диагоналей находились в каком либо произвольном порядке квадратик с цифрами 1, 2, 3 и 4, и притом непременно разных окрасок.

Задача допускает очень много решений. Продумайте систему, обеспечивающую возможность получения всех решений.

Как велико число всех различных решений?



РЕШЕНИЯ

НАШ СЕМЕЙНЫЙ «БРЕЙН-РИНГ»

1. Когда к 2 часам ночи прибавятся еще прошедшие 23 часа; $2 + 23$ — результат: 1 час (другого наступившего дня).

2. Может, например, $\frac{-1}{2} = \frac{3}{-6}$, ($-1 < 2$, но $3 > -6$).

3. Все десять чисел — нули: поскольку все их попарные произведения неотрицательны, то среди них не может быть чисел разных знаков, а в силу равенства нулю их суммы, среди них не найдется ни одного, отличного от нуля.

4. $99\frac{9}{9}$.

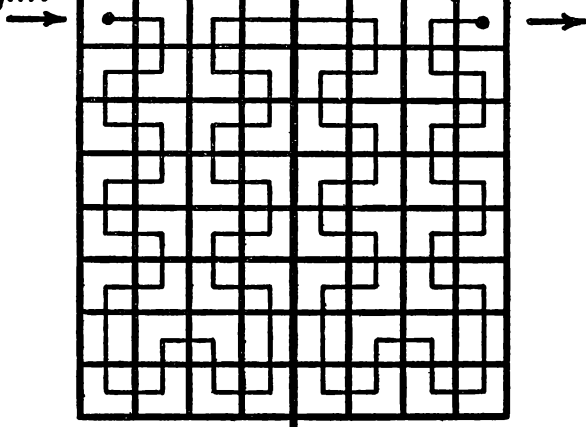
5. Запрещен множитель вида $\left(\frac{k}{k}\right)^k$ или k^{k-k} , но не слагаемое, поэтому $100 = 99 + 9^9 - ^9 = 99 + 99^9 - ^9 = 99 + 999^9 - ^9$ и т.д.

Возможны другие виды выражения числа 100, например,

$$\begin{aligned}
 &99 + \left(\frac{9}{9}\right)^9 - 5 \text{ цифр,} \\
 99 + \frac{99}{99} &= \frac{999 - 99}{9} = \left(9 + \frac{9}{9}\right)\left(9 + \frac{9}{9}\right) - 6 \text{ цифр,} \\
 99 - 9 + \frac{99 - 9}{9} &- 7 \text{ цифр, и т.д.}
 \end{aligned}$$

6. Маршрут на рисунке на странице 175. Африканская пословица: «Чтобы взлететь в небо, нужны крылья. Чтобы заслужить уважение, нужен труд».

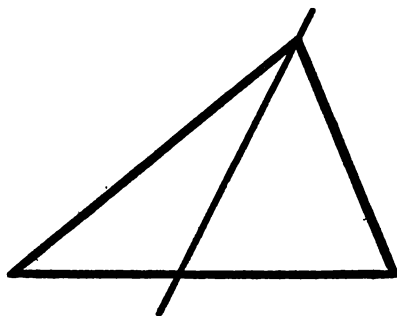
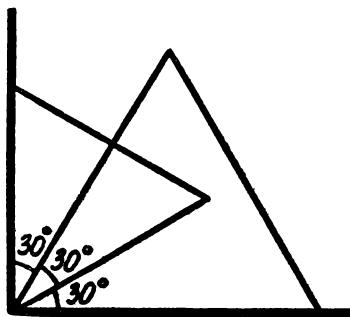
Маршрут:



7. Построили бы два равно-
сторонних треугольника произ-
вольного размера, как показано
на рисунке слева.

8. $11 \cdot 9 + 11 + 9 = 119$ или
 $11 \cdot 9 + 1 + 19 = 119$;
 $123 \cdot 9 + 123 + 9 = 1239$.

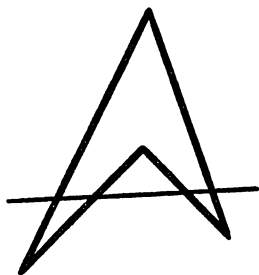
9. Прямую, пересекающую
сторону треугольника, следует
провести через противоположную
вершину. Считается, что в верши-
не она пересекает сразу две сто-
роны треугольника (рис. внизу).



10. Пусть написали x , тогда $1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$; второй раз: $1 - \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-x}$; третий раз: $1 - \frac{1-x}{1} = x$ — исходное число.

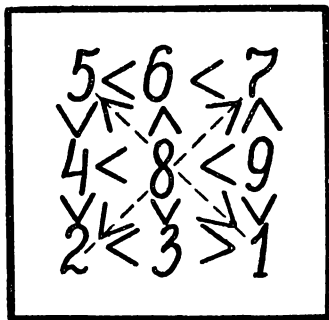
11. Одно решение из большого числа возможных представлено на рисунке:

	O	O	O	
	O		O	O
O		O		O
O			O	O
O	O	O		



12. Успеха достиг тот, кто мыслил нестандартно и построил не выпуклый четырехугольник, например, как на рисунке слева.

13. Возможное решение представлено на рисунке внизу.



14. Число ответов каждой категории (m правильных, n неправильных) обратно пропорционально соответствующему числу очков: $\frac{m}{n} = \frac{5}{8}$, значит $\frac{m+n}{m} = \frac{13}{5}$, $\frac{26}{m} = \frac{13}{5}$, откуда $m = 10$.

15. Последней цифрой четвертой степени натурального числа может быть только 0, 1, 5 или 6, поэтому сразу зачеркиваем 8, 7 и 2. Зачеркнув еще одну цифру: 4 или 1, или 0, или 9, устанавливаем, что из образовавшихся четырех чисел удовлетворяет требованию задачи одно: $4096 = 8^4$.

16. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника меньше суммы тех его сторон, которые вместе с этой диагональю образуют треугольник. Напишем пять неравенств относительно диагоналей. Сложив их, получим подтверждение правильности высказанного утверждения.

17. $20 = 9 + \frac{99}{9}$.

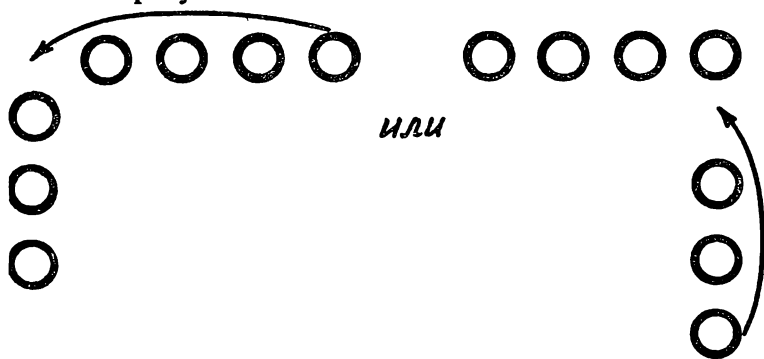
18. Зрительное восприятие неравенства иллюзорно. В действительности $a = b$ и $AB = BC$.

19. Перекатим вниз монету № 1 и оставим под № 6 (1), затем — № 3 и оставим под № 8 (2), № 2 и оставим под № 1 (3), № 4 и оставим под № 3 (4), наконец — № 5, и поместим в строку между № 2 и № 4 (5).

20. Только петли C и D затянутся в узел.

21. В 8 раз.

22. См. рисунок:



23. Килограмм металла всегда дороже, чем полкилограмма того же металла.

24. Правильный ответ: условие задачи некорректно — поросянок — не рогатое животное. Но, если этим «подвохом» пренебречь, то действительно на 100 р. возможно было купить 100 голов домашних животных: 9 коров, 51 овцу и 40 поросят.

25. Если сложить 12400 членов гармонического ряда, то сумма $S_{12400} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{12400}$ будет очень близка к числу 10.

26. Разложимы на разность кубов двух последовательных чисел: $217 = 9^3 - 8^3$ и $271 = 10^3 - 9^3$. Неразложимы: 172 и 712, как и вообще всякое натуральное число, последняя цифра которого 2.

$$27. 2 = 3 - 33 : 33, \quad 2 = \sqrt[3]{33 : 3 - 3}.$$

28. Знаменатель заданной дроби есть числовое выражение тождества: $n^2 - (n - 1)(n + 1) = n^2 - (n^2 - 1) = 1$, и дробь становится целым числом: 1234567890.

$$29. 2 \text{ ч } 18\frac{6}{13} \text{ мин.}$$

$$30. 55\frac{5}{13} \text{ мин.}$$

31. Можно назвать любые два числа a и b , лишь бы $a \neq b$ и $a + b = 1$. Действительно, если $a^2 + b = b^2 + a$, то $a^2 - b^2 = a - b$, откуда $a + b = 1$.

32. Да, в том случае, когда общая часть двух отрезков — также отрезок.

33. Очевидно, что требуемое размещение неосуществимо, если каждая монета должна «принадлежать» плоскости стола, как некая точка. Надо прибегнуть к небольшой уловке: разместить 3 монеты на столе в вершинах воображаемого треугольника и на одну из них положить четвертую монету, как бы имитируя «двойную точку», разумеется не в строгом смысле этого математического понятия.

34. Только в прямоугольном треугольнике. Середины высот принадлежат средней линии треугольника, параллельной гипотенузе.

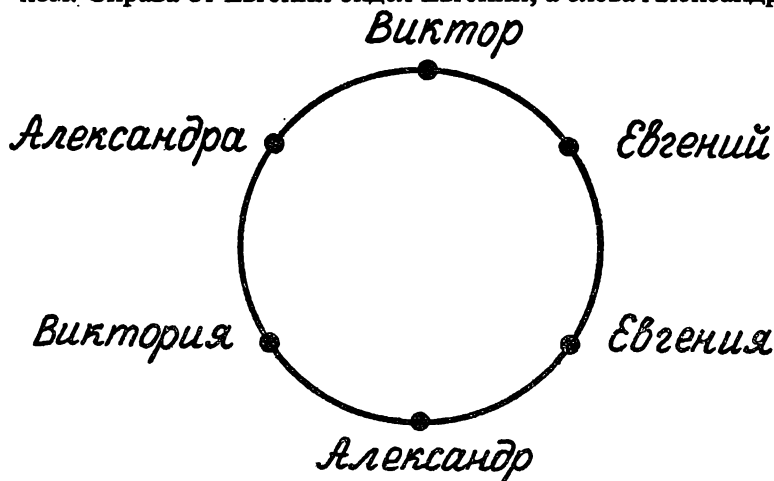
35. Четверг, 31 декабря 2009 г.

36. Любого, в «хвосте» которого 9 единиц.

$$37. 53^3 = 148877.$$

БРАЧНЫЕ ПАРЫ ЗА КРУГЛЫМ СТОЛОМ

Условию удовлетворяет решение, представленное рисунком. Справа от Евгении сидел Евгений, а слева Александр.



ЧЕРНАЯ ИЛИ РЫЖАЯ?

Рыжая.

ВСТРЕЧА БЫЛА КОРОТКОЙ

В момент встречи машинистов расстояние между кондукторами будет $250 + 250 = 500$ м. Кондукторы сближаются со скоростью $60 + 60 = 120$ км/ч, или $\frac{100}{3}$ м/с.

Искомое время равно $500 : \frac{100}{3} = 15$ с.

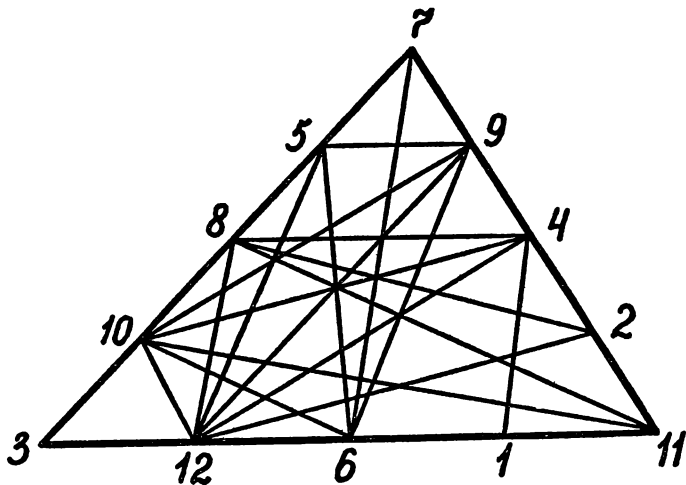
ЗДРАВЫЙ СМЫСЛ ПЛЮС СМЕКАЛКА

Так как скорость гидросамолета в 10 раз больше скорости теплохода, то 180 миль — это $\frac{9}{10}$ искомого пусть S . Значит, $S = 200$ миль.

ВЕНОК ИЗ РОМАШЕК И ВАСИЛЬКОВ...

1. При сложении чисел, размещаемых на сторонах треугольника, получаем: $1 + 2 + \dots + 11 + 12 + q = 78 + q$, где q — сумма каких-то трех из них, расположившихся в вершинах. Магическая сумма $S = \frac{78+q}{3} = 26 + \frac{q}{3}$; S — натуральное только, когда q кратно трем. Наименьшее возможное значение $q = 1 + 2 + 3 = 6$, поэтому $S_{\text{наим.}} = 26 + 2 = 28$. Наибольшее возможное значение $q = 10 + 11 + 12 = 33$, поэтому $S_{\text{наиб.}} = 26 + 11 = 37$.

2. $3 + 10 + 8 + 5 + 7 = 7 + 9 + 4 + 2 + 11 =$
 $= 11 + 1 + 6 + 12 + 3 = 33$ (см. рис.).



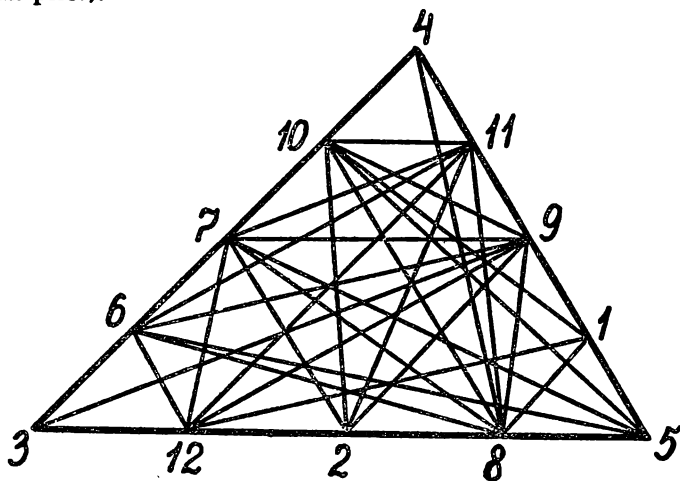
11 магических четырехугольников:

$$\begin{aligned}
 12 + 11 + 2 + 8 &= 12 + 10 + 9 + 2 = 12 + 10 + 7 + 4 = \\
 &= 12 + 10 + 5 + 6 = 12 + 8 + 9 + 4 = 12 + 5 + 7 + 9 = \\
 &= 12 + 8 + 7 + 6 = 11 + 3 + 10 + 9 = 11 + 10 + 8 + 4 = \\
 &= 10 + 8 + 9 + 6 = 11 + 9 + 5 + 8.
 \end{aligned}$$

3. $q = 3 + 7 + 1 = 11$ — не делится на 3.

4. $q = 3 + 7 + 2 = 12$; $12 : 3 = 4$, поэтому $S = 26 + 4 = 30$.

5. $q = 3 + 4 + 5 = 12$; $S = 26 + 4 = 30$. Вариант решения (см. рис.):



$$\begin{aligned}
 3 + 6 + 7 + 10 + 4 &= 4 + 11 + 9 + 1 + 5 = \\
 &= 5 + 8 + 2 + 12 + 3 = 30;
 \end{aligned}$$

19 магических четырехугольников:

$$\begin{aligned}
 12 + 6 + 11 + 1 &= 12 + 3 + 4 + 11 = 12 + 7 + 10 + 1 = \\
 &= 12 + 6 + 10 + 2 = 12 + 9 + 1 + 8 = 12 + 7 + 9 + 2 = \\
 &= 12 + 3 + 6 + 9 = 12 + 6 + 4 + 8 = 12 + 6 + 7 + 5 = \\
 &= 11 + 10 + 8 + 1 = 11 + 10 + 7 + 2 = 11 + 9 + 8 + 2 = \\
 &= 11 + 9 + 3 + 7 = 11 + 8 + 7 + 4 = 11 + 5 + 8 + 6 = \\
 &= 10 + 9 + 8 + 3 = 10 + 9 + 5 + 6 = 10 + 5 + 8 + 7 = \\
 &= 9 + 8 + 6 + 7.
 \end{aligned}$$

ПОДСЧИТАТЬ НЕ ПЕРЕСЧИТЫВАЯ

Присвоим шести заданным отрезкам порядковые номера. Каждые три из этих отрезков, пересекаясь, формируют треугольник. Так, в сочетании отрезков № 1 и № 2 с каждым из остальных формируется 4 треугольника (123, 124, 125, 126). В сочетании отрезков № 1 и № 3 с остальными (исключая № 2) — 3 треугольника (134, 135, 136). В сочетании № 1 и № 4 с остальными (исключая № 2 и № 3) — 2 треугольника (145, 146), плюс еще один: комбинация (156). Всего отрезок № 1 в сочетании с остальными образует $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ треугольников. Отрезок № 2 в сочетании с № 3, 4, 5 и 6 образует еще 6 треугольников (убедитесь!), № 3 с № 4, 5, 6 — 3 треугольника и № 4 с № 5, 6 — 1 треугольник.

Всего 20 треугольников.

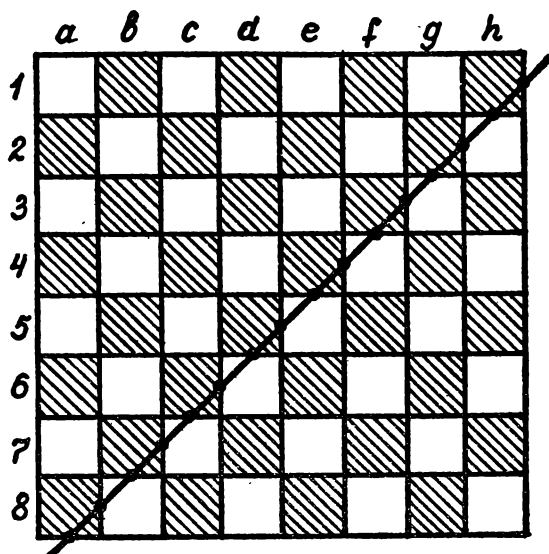
Знающие формулу для числа сочетаний, получают тот же ответ сразу:

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 20.$$

СЕКУЩАЯ ШАХМАТНУЮ ДОСКУ

Отметим все точки проведенной прямой (рис. на с. 183), общие с границами клеток шахматной доски. Отмеченные точки разбивают отрезок проведенной прямой на несколько конечных отрезочков. Каждый образовавшийся отрезочек проходит по одной и только одной клетке шахматной доски. Следовательно, сосчитав такие отрезочки, мы узнаем, сколько клеток пересекает проведенная прямая.

Шахматная доска разделена на клетки восемнадцатью прямолинейными отрезками: девятью вертикалями и девятью горизонталями. С каждой из них проведенная прямая может пересекаться лишь в одной точке, но из четырех отрезков, служащих краями доски, она пересекается лишь с двумя. Следовательно, на проведенной прямой



может быть самое большее 16 отмеченных точек, которые разбивают ее не более, чем на 15 отрезков.

Таким образом, любая прямая, проведенная на шахматной доске, может пересекать не более, чем 15 клеток. Проведя прямую, параллельную любой из диагоналей на шахматной доске, так, чтобы она проходила через середины сторон двух угловых клеток, мы получим прямую, которая действительно пересекает 15 клеток.

Итак, любая прямая, проведенная на шахматной доске, может пересекать 15 клеток, но не больше.

ДВОЙКА В ГОЛОВОЛОМКЕ

$$2^{2^2} = 65536.$$

ВСЕ ЦИФРЫ В ГОСТИ К НАМ...

Ребус 1. 987654321.

С ТРЕТЬЕЙ ПОПЫТКИ Я УГАДАЛ...

Надо выяснить, каким же двум соседним местам в предложенном мною варианте

1	2	3	4	5
Г	А	Д	В	Б

правильно соотнесены имена гимнастов.

Предположим, правильно названы имена гимнастов, занявших 1 — 2 места:

1	2	.	.	.
Г	А	.	.	.

На остальные места можно расставить Д, В и Б шестью способами: Д В Б, Д Б В, В Б Д, В Д Б, Б В Д, Б Д В.

Первый вариант Г А (Д В Б) уже отвергнут. Остальные пять тоже непригодны, так как в каждом из них либо возникает алфавитная последовательность имен в паре рядом расположенных, например, Г А (Д Б В), Г А (Б Д В), либо возникают частичные совпадения с первоначально предложенным вариантом (1), в котором каждое соотнесение имени и места признано не соответствующим действительности, например, в варианте Г А (В Б Д) гимнаст В занимает 3-е место, что, как установлено при оценке

1 2 3 4 5
варианта А Б В Г Д, не имеет места в действительности.

Так же обосновывается непригодность предположения, что правильно соотнесены места парам А Д (2-е, 3-е) и Д В (3-е, 4-е) — убедитесь! Следовательно, 4-е и 5-е места действительно заняли гимнасты В и Б.

Теперь, зная, что А занял не 1-е место и алфавитный порядок для Г Д исключен, легко определяем: первые три места заняли Д Г А соответственно.

Итак, с третьей попытки сформировался ответ:

места	1	2	3	4	5
заняли	Д	Г	А	В	Б

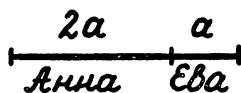
КАК ПОМОЛОДЕТЬ ГОРОДУ?

Пусть T — сумма возрастов всех домов, а n — общее количество домов. Тогда $\frac{T}{n}$ — средний возраст города. Если построить новый дом, средний возраст города станет равным $\frac{T}{n+1} < \frac{T}{n}$. Если снести старый дом, средний возраст города станет равным $\frac{T-t}{n-1} < \frac{T}{n}$ (t — возраст сносимого дома). Получается, что *город молодеет в любом случае*. Но, что меньше: $\frac{T}{n+1}$ или $\frac{T-t}{n-1}$? Определим, при каком значении t выгоднее сносить старый дом, чем строить новый. Решая неравенство $\frac{T}{n+1} > \frac{T-t}{n-1}$, получим ответ: при $t = \frac{2T}{n+1}$.

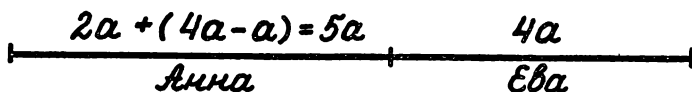
НЕУДАВШЕЕСЯ УТАИВАНИЕ ВОЗРАСТА

Попытка первая. Клубок распутывать удобнее, перемещаясь от конца условия к началу:

1 (от конца). Анна старше Евы вдвое,



2. когда Ева старше Анны вдвое,



3. когда возраст Анны = $\frac{9}{16} \cdot (\text{возраст Евы})$,

$$\frac{9}{16} \cdot 4a = \frac{9}{4}a \quad \frac{9}{4}a - a = \frac{5}{4}a$$

$\overline{\hspace{1.5cm} \hspace{1.5cm}}$
 Анна Ева

4. возраст Анны = $\frac{15}{16} \cdot (\text{возраст Евы})$

$$\frac{15}{16}a \quad \frac{11}{16}a$$

$\overline{\hspace{1.5cm} \hspace{1.5cm}}$
 Анна Ева

$\frac{75}{64}a + \frac{11}{64}a = 86$, откуда $a = 64$. Следовательно, возраст Анны — 75 лет, возраст Евы — 11 лет.

Попытка вторая. Девочке не меньше трех лет (по условию) и не больше 12 (по смыслу слова «девочка» — ребенок). Значит через 3 года девочке будет не меньше 6 и не больше 15 лет. Но между 6 и 15 есть только один точный квадрат: 9.

Следовательно, возраст девочки равен $9 - 3 = 6$ годам.

ЭФФЕКТНЫЙ ФОКУС С ИГРАЛЬНЫМИ КУБИКАМИ

Образующееся шестизначное число с цифрами a, b, c , $7 - a, 7 - b, 7 - c$ запишем как $N = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2(7 - a) + 10(7 - b) + (7 - c)$. Дальнейшие действия: $(N : 111 - 7) : 9$ приводят фокусника к числу $100a + 10b + c$ (убедитесь!), цифры которого — a, b и c .

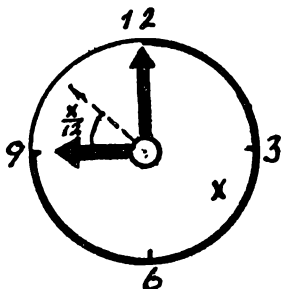
СЕКУНДЫ, СЕКУНДЫ, СЕКУНДЫ...

Очевидно речь идет о секундах дуговых и временных, то есть спрашивается: сколько дуговых секунд пройдет секундная стрелка за одну секунду времени.

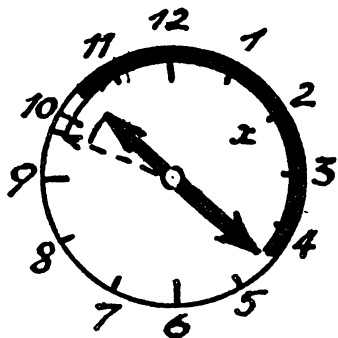
Подсчет несложный: $\frac{360 \cdot 3600}{60} = 21600''$.

ВЕЧНОЕ КРУЖЕНИЕ ЧАСОВЫХ СТРЕЛОК

Первая. Пусть минутная стрелка (после 9 ч.) догонит часовую через x мин. Минутная стрелка проходит одно деление циферблата за одну минуту, а часовая — за 12 мин. За x мин часовая стрелка проходит $\frac{x}{12}$ делений. Но разность $x - \frac{x}{12} = 45$. Решая уравнение, находим $x = 49\frac{1}{11}$ мин. Минутная и часовая стрелки совпадут через $49\frac{1}{11}$ мин.



Вторая. Когда стрелки совпали, часы показывали 9 ч $49\frac{1}{11}$ мин. Через x мин стрелки часов будут «смотреть» в противоположные стороны. Часовая пройдет за x минут



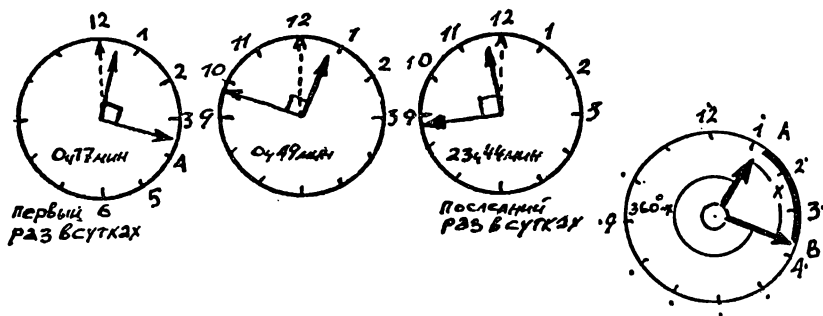
$\frac{x}{12}$ делений, а разность $x - \frac{x}{12} = 30$, откуда $x = 32\frac{8}{11}$ мин. Узнаем, какое время покажут часы в этот момент:

$$60 - 49\frac{1}{11} = 10\frac{10}{11},$$

$$32\frac{8}{11} - 10\frac{10}{11} = 21\frac{9}{11}.$$

Часы покажут 10 ч 22 мин.

Третья. В первый же час суток стрелки часов дважды образуют прямой угол. Каждый последующий час, кроме промежутков времени от 2 ч до 4 ч и от 8 ч до 10 ч, стрелки образуют прямой угол дважды, а в эти промежутки — по три раза. За полсутки стрелки становятся перпендикулярными $(12 - 4) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 22$ раза. За сутки — 44 раза. Первый раз в сутках прямой угол образуется стрелками в 0 ч 17 мин, последний раз — в 23 ч 44 мин (см. рис.).



Четвертая. Павлик вернулся через 2 ч, плюс t мин опоздания, причем, по условию, $t < 60$. Следовательно, на циферблате между стрелками должны быть две цифры, указывающие время в часах, например, как на рисунке.

Пусть дуга AB содержит x дуговых градусов. Часовая стрелка пройдет 360° за $12 \cdot 60 = 720$ мин, то есть каждый градус за 2 мин.

Дугу x° , перемещаясь из A в B , она пройдет за $2x$ мин. За это же время минутная стрелка переместится из B в A , описав два полных оборота (720°), плюс часть третьего оборота ($360^\circ - x$), то есть дугу $1080^\circ - x$. За одну минуту она переместится на $\frac{360}{60} = 6^\circ$. Следовательно, $\frac{1080^\circ - x}{2x} = 6$, откуда $x = \frac{1080^\circ}{13}$, а время опоздания: $t = 2x - 120 = \frac{2160}{13} - 120 \approx 46$ мин.

Если, допустим, Павлик ушел купаться в 13 ч 20 мин, то вернулся в 13 ч 20 мин + 2 ч 46 мин = 16 ч 06 мин. За это время стрелки часов поменялись местами.

Я НЕ ХОЧУ БРАТЬ ПОСЛЕДНИЙ ПОНЧИК

Начинающий брать пончики всегда победит партнера, если сначала возьмет два пончика из того ряда, в котором их три и далее будет придерживаться такой стратегии: брать пончики так, чтобы после этого в каждом ряду оставалось одинаковое их количество, или так, чтобы в одном ряду остался один пончик, в другом — два и еще в одном — три.

КАКОЙ КОЛОСС КОЛОССАЛЬНЕЕ?

$63^9 < 64^9 = 2^{54}$; $33^{11} > 32^{11} = 2^{55}$. Так как $2^{55} > 2^{54}$, то тем более $33^{11} > 63^9$.

ТАЙНЫ ПОСЛЕДНЕЙ ЦИФРЫ

Первая. $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ и, чтобы это число оканчивалось цифрой 7, $k(k+1)$ должно оканчиваться цифрой 4, чего быть не может, так как непосредственно легко проверить, что произведение $k(k+1)$ может оканчиваться лишь на 0, 2 или 6.

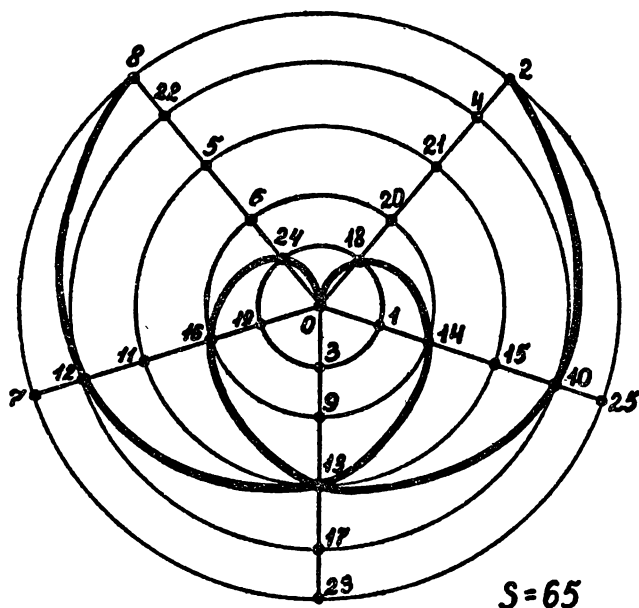
Вторая.

$$\begin{aligned} 207^{208} &= (207^4)^{52} = (\dots 1)^{52} = \dots 1; \\ 209^{210} &= (209^3)^{105} = (\dots 1)^{105} = \dots 1. \end{aligned}$$

МАГИЧЕСКИЕ СПИРАЛИ И ОКРУЖНОСТИ

Сумма всех номеров равна $1 + 2 + \dots + 25 = 325$. Каждый номер является слагаемым в двух магических суммах: вдоль окружности и вдоль луча, поэтому, удваивая 325 получим 650.

Оставляя пока в стороне спирали, замечаем, что магическая сумма S повторяется 10 раз. Из равенства $10S = 650$ получаем: $S = 65$. Полностью реставрированная картинка представлена на рисунке.



ПО ЦВЕТУЩЕМУ ЛУГУ

Петр Петрович, по-видимому, глуховат, так как не слышит стрекота кузнечиков — дефект, наличие которого естественнее предположить у более старого из собеседников. Следовательно, вероятнее всего именно Василий Васильевич значительно моложе Петра Петровича.

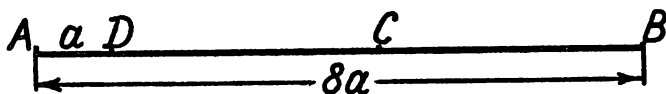


Пусть AB — возраст Петра Петровича, AC — возраст Василия Васильевича. Отложив отрезок $CD = CB$, получим $AD = a$ — возраст Василия Васильевича, когда он был в 8 раз моложе Петра Петровича. Имеем:

$$AB = 8a, DB = 7a, DC = \frac{7}{2}a, AC = AD + DC = \frac{9}{2}a.$$

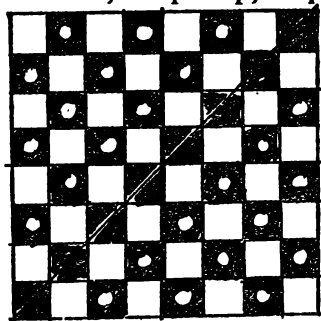
Искомое отношение возрастов: $\frac{9}{2}a : 8a = \frac{9}{16}$.

Допустимо предположить, например, что Петру Петровичу 80 лет, тогда Василию Васильевичу $\frac{9}{16} \cdot 80 = 45$ лет.

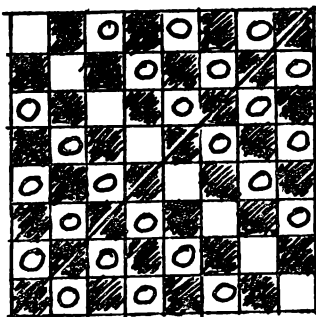


ГАРМОНИЯ СИММЕТРИИ

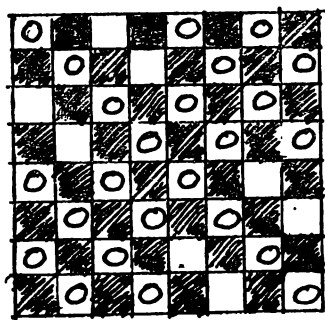
Вряд ли была бы достижима «гармония» при беспорядочной расстановке шашек. Замечаем, что черных полей на шахматной доске, кроме образующих главную диагональ, ровно 24, причем попарно симметричных относительно главной диагонали. Размещение шашек на этих полях дает одно из возможных решений (рис. а). Белых полей, попарно симметричных главной диагонали, 32. Но, если расставляя шашки только на белых полях, оставить свободными 8 полей второй диагонали, то получим второе решение (рис. б). Если же, наоборот, занять шашками эту диагональ, то возможно и такое «гармоничное» расположение как, например, на рисунке в.



а)



б)



в)

ТРИ КВАРТЫ, ТРИ КВАРТЫ...

Решение представлено таблицей:

$9 = 4 + \sqrt{4} : .4$	$37 = (4! + \sqrt{4}) : \sqrt{4}$	$65 = (4! + \sqrt{4}) : .4$
$10 = 4 + 4 + \sqrt{4}$	$38 = \sqrt{4} + 4! : \sqrt{4}$	$66 = 44 : \sqrt{4}$
$11 = 44 : 4$	$39 = (4! + \sqrt{4}) : \sqrt{4}$	$67 = 4^{\sqrt{4}} + \sqrt{4}$
$12 = 4 + 4 + 4$	$40 = 4! + 4 \cdot 4$	$68 = 4! + 44$
$13 = 4 + 4 : .4$	$41 = 44 - \sqrt{4}$	$69 = !4 + 4! : .4$
$14 = 4 \times 4 - \sqrt{4}$	$42 = 44 - \sqrt{4}$	$70 = (4! + 4) : .4$
$15 = (4 + \sqrt{4}) : .4$	$43 = 44 - !\sqrt{4}$	$71 = 4! \sqrt{4} - !\sqrt{4}$
$16 = (4 + 4) \sqrt{4}$	$44 = 4! \sqrt{4} - 4$	$72 = 4! + 4! \sqrt{4}$
$17 = 4 + 4 + !4$	$45 = \sqrt{4} : (.4 - .4)$	$73 = 4! \sqrt{4} + !\sqrt{4}$
$18 = (4 \times 4) + \sqrt{4}$	$46 = 4! \sqrt{4} - \sqrt{4}$	$74 = 4! \sqrt{4} + \sqrt{4}$
$19 = 4! - \sqrt{4} : .4$	$47 = 4! \sqrt{4} - !\sqrt{4}$	$75 = 4! \sqrt{4} + \sqrt{4}$
$20 = 4! - \sqrt{4} - \sqrt{4}$	$48 = 4!4 : \sqrt{4}$	$76 = 4! \sqrt{4} + 4$
$21 = 4! - \sqrt{4} : \sqrt{4}$	$49 = 4! \sqrt{4} + !\sqrt{4}$	$77 = (4 \times 4) - 4$
$22 = 4! - 4 : \sqrt{4}$	$50 = 4! \sqrt{4} + \sqrt{4}$	$78 = (4 \times 4) - \sqrt{4}$
$23 = 4! - 4 : 4$	$51 = 4! \sqrt{4} + \sqrt{4}$	$79 = (4 \times 4) - \sqrt{4}$
$24 = 4! + 4 - 4$	$52 = 4! \sqrt{4} + 4$	$80 = (4 \times 4) - !\sqrt{4}$
$25 = 4! + 4 : 4$	$53 = (4! - .4) : .4$	$81 = 4! \sqrt{4} + !4$
$26 = 4! + 4 : \sqrt{4}$	$54 = (4 + \sqrt{4}) !4$	$82 = (4 \times 4) + !\sqrt{4}$
$27 = 4! + \sqrt{4} : \sqrt{4}$	$55 = (4! + .4) : .4$	$83 = (4 \times 4) + \sqrt{4}$
$28 = 4! + \sqrt{4} + \sqrt{4}$	$56 = \sqrt{4} + 4! : .4$	$84 = (4 \times 4) + \sqrt{4}$
$29 = 4! + \sqrt{4} : 4$	$57 = \sqrt{4} + 4! : .4$	$85 = (4 \times 4) + 4$
$30 = 4! + 4 + \sqrt{4}$	$58 = 4 + 4! : .4$	$86 = \sqrt{4}! + \sqrt{4}!! : !4$
$31 = 4! + !4 - \sqrt{4}$	$59 = (4! - .4) : .4$	$87 = \sqrt{4}! + !4 \times 4$
$32 = 4! + 4 + 4$	$60 = 4! + 4! : \sqrt{4}$	$88 = 4^{\sqrt{4}} + 4!$
$33 = 4! + 4 : .4$	$61 = (4! + .4) : .4$	$89 = !4 + \sqrt{4}!! : !4$
$34 = 4! + 4 : .4$	$62 = \sqrt{4} + 4! : .4$	$90 = (4 \times 4!) - \sqrt{4}!$
$35 = (4! - \sqrt{4}) : \sqrt{4}$	$63 = (4! + 4) : .4$	
$36 = (4 + \sqrt{4})^{\sqrt{4}}$	$64 = 4 \times 4 \times 4$	

«УЛИК» ДОСТАТОЧНО

$$271 \cdot 322 = 542 + 5420 + 81300 = 87262$$

Второй ответ. $281 \cdot 332 = 93292$.

КРОСС ЧИСЕЛ

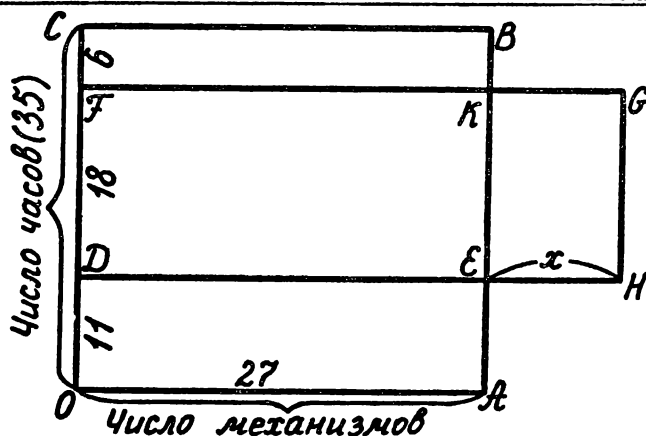
См. рисунок:

¹ 5	² 3	2	³ 9		⁴ 1
⁵ 1	1		⁶ 7	⁷ 2	9
	⁸ 7	⁹ 3		4	
¹⁰ 6	9	8	¹¹ 8	9	¹² 6
¹³ 3	9		¹⁴ 3	6	5
8		¹⁵ 1	6	0	0

ПРИДУМАЙТЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ

Геометрической моделью количества заданной работы может служить прямоугольник $OABC$ (рис. на с. 195), одна сторона которого изображает количество механизмов, а другая — число часов, затрачиваемых на выполнение всей заданной работы.

Пусть прямоугольник $OAED$ изображает количество работы, выполненной до подключения x добавочных механизмов. Остальную работу (фигура $EDCB$) выполнили $27 + x$ механизмов. Следовательно, второй период работы изобразится прямоугольником $DHGF$ ($DH = 27 + x$), равновеликим прямоугольнику $DEBC$, у которого

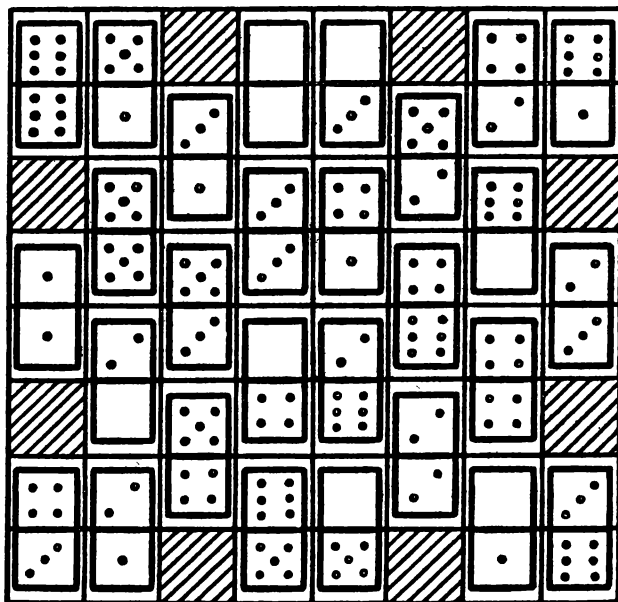


$DF = (35 - 11) - 6 = 18$, так как эта часть работы выполнена на 6 ч раньше срока.

Производим очевидные вычисления:

$$S_{FKBC} = S_{EHGK} \Rightarrow 27 \cdot 6 = 18x \Rightarrow x = 9.$$

ИГРАЕМ В «ОЧКО»...



В ТЕСНОЙ БЛИЗОСТИ ДРУГ К ДРУГУ...

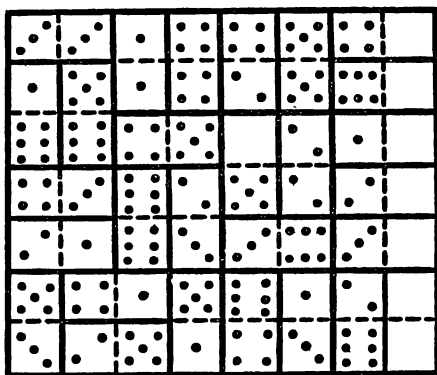
См. рисунок:

32	19	2	13	16	3	18	29
5	10	27	24	21	26	11	8
25	22	7	12	9	6	23	28
4	15	30	17	20	31	14	1

МАГИЯ НА ПЛИТКАХ ДОМИНО

1. Сверху вниз слева: $\begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$,
 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$. Слева направо сверху: $\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$,
 $\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$. Справа сверху
вниз: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 & 2 \end{bmatrix}$,
 $\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$. Внизу: $\begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 & 6 \end{bmatrix}$,
 $\begin{bmatrix} 6 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}$.

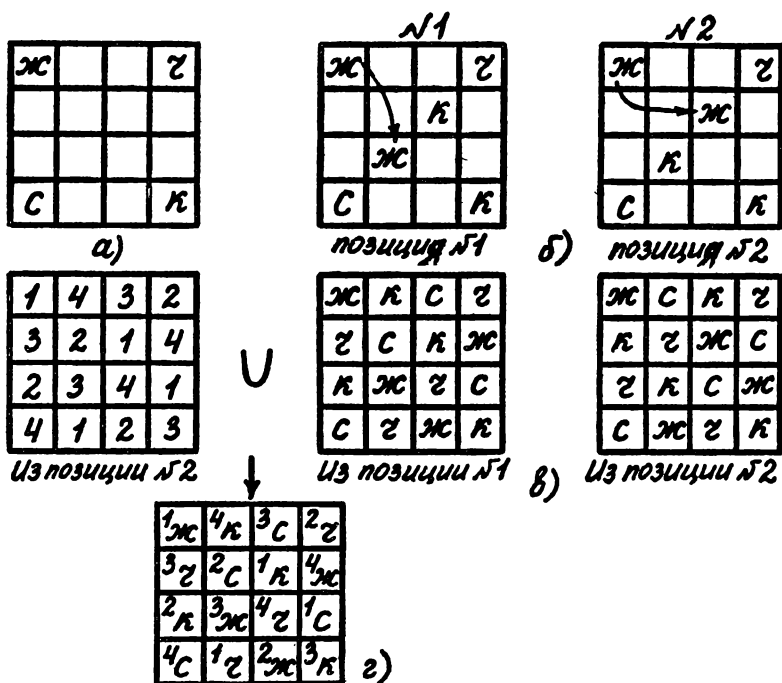
2. См. рисунок на с. 197.



МОЗАИКА ИЗ РАЗНОЦВЕТНЫХ КВАДРАТИКОВ

Решим сначала вспомогательную задачу. Предположим, что мы размещаем в 16 клетках квадрата по 4 раза каждую из четырех букв **ж**, **ч**, **к**, **с** (начальные буквы названий заданных красок) таким образом, что в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждой из двух диагоналей не будет одинаковых букв. Из этого условия следует, что угловые клетки надо занять различными буквами, разместив их в произвольном порядке (рис. а на с. 198). В средних клетках диагонали, содержащей буквы **ч** и **с** должны стоять буквы **ж** и **к**.

Их можно поставить двумя способами (рис. б на с. 198). Буква, занимающая клетку в левом верхнем углу, дублируется ходом шахматного коня по диагонали и вниз или — по диагонали и вправо. Первый из этих вариантов расположения шести букв назовем исходной позицией № 1, а второй — исходной позицией № 2.



После того как указанные 6 клеток заполнены буквами, остальные клетки в соответствии с условием могут быть заполнены единственным образом (рис. в).

Так как 4 буквы в угловых клетках можно разместить 24 способами, то каждая из двух исходных позиций дает серию буквенных (красочных) квадратов по 24 варианта в каждой серии. Всего: 48 решений промежуточной задачи.

Далее. Пусть тем же приемом отдельно выполнено размещение четырех комплектов чисел (1, 2, 3, 4) по клеткам квадрата. Из двух аналогичных исходных позиций (№ 1 и № 2) также образуются две серии числовых квадратов по 24 варианта в каждой серии. Теперь, чтобы получить решение, требуемое условием основной задачи, достаточно на-

ложить (объединить, знак объединения: \cup) любой буквенный (красочный) квадрат из первой серии на любой числовой квадрат из второй серии и любой буквенный квадрат из второй серии на любой числовой квадрат из первой серии. Примерное решение представлено на рисунке 2 (с. 198).

Почему нельзя «складывать» (объединять) буквенный и числовой квадраты, если оба взяты из одной серии, видно на примере (рис. а внизу).

Если же, сохраняя числа в угловых клетках, поменяем местами числа 1 и 3 в диагональных клетках — возникает числовой квадрат из серии № 1. В объединении с буквенным квадратом из серии № 2 он образует одно из решений (рис. б внизу).

а)

1	4	3	2
3	2	1	4
2	3	4	1
4	1	2	3

 \cup

ж	с	к	ч
к	ч	ж	с
ч	к	с	ж
с	ж	ч	к

 =

¹ ж	⁴ с	³ к	² ч
³ к	² ч	¹ ж	⁴ с
² ч	³ к	⁴ с	¹ ж
⁴ с	¹ ж	² ч	³ к

 \rightarrow {не удов-
летворяет
условию
задачи}

из серии №2 *из серии №2*

б)

1	3	4	2
2	4	3	1
3	1	2	4
4	2	1	3

 \cup

ж	с	к	ч
к	ч	ж	с
ч	к	с	ж
с	ж	ч	к

 =

¹ ж	³ с	⁴ к	² ч
² к	⁴ ч	³ ж	¹ с
³ ч	¹ к	² с	⁴ ж
⁴ с	² ж	¹ ч	³ к

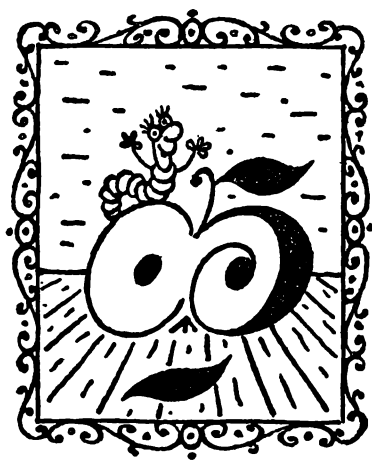
 \rightarrow {удовлет-
воряет
условию
задачи}

из серии №1 *из серии №2*

Всех различных решений будет, следовательно, $(24 \cdot 24) \cdot 2 = 1152$.

В моей книге «Математическая смекалка» («Наука», 1965 и предыдущие годы) ошибочно предполагалась независимость решения от принадлежности объединяемых буквенного и числового квадратов к одной или разным сериям (задача № 115), что привело к преувеличенному числу возможных решений. Пользуюсь возможностью извиниться перед читателями за допущенную оплошность.





ТРИНДЦАТЬ
УВЛЕЧЁННЫХ
ЧУДЬКОВ

Коперник целый век трудился,
Чтоб доказать Земли вращенье.
Чудак! Зачем он не напился,
Тогда бы не было сомненья!

*В давние времена —
шутливая песенка студентов*

1. ЧУДАК-РЫБАК

Рыбу ловит, а сам не ест (народная прибаутка).

Выловил он сома и решил поразить нас его весом: перекинул шнурок через блок, подвешенный к пружинным весам, к одному концу шнура привязал сома, а второй конец шнура прикрепил к полу и, хитро улыбаясь, заявил торжественно:

— Смотрите! Весы отмечают: ровно 15 кг.

Показания весов, конечно, не опровергнешь, но сом этот ведь намного легче, не так ли?



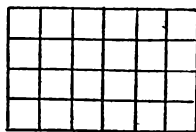
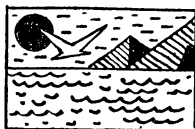
2. КУЛИНАРКА

До полной готовности пирога осталась последняя операция — поставить его в «духовку» ровно на 9 минут. Как нашей кулинарке отсчитать требуемые минуты, если она (*чудачка!*) не признает иных часов, кроме «песочных»? В ее распоряжении находятся «малые» и «большие» часы, при опрокидывании которых песок пересыпается из верхней колбочки в нижнюю — первоначально пустую — ровно 4 минуты и 7 минут соответственно. Никаких «делений» такие часы не имеют.

3. ХУДОЖНИК-АБСТРАКЦИОНИСТ

Произведения абстракционистов, представленные на выставке, с предельной ясностью показали, что для того, чтобы написать художественное полотно, не требуется ни таланта, ни специального образования, достаточно иметь немного воображения.

Вот и наш художник-абстракционист с грациозной легкостью создал свой очередной шедевр — «Море». Из второго листа такого же размера он приглашает вас изготовить рамку, шириной в одну клетку, полностью окаймляющую его картину. Для этого надо разрезать лист по указанным линиям на 4 «уголка».



4. КОЛЛЕКЦИОНЕР

Количество почтовых марок в коллекции юноши выражается числом, обе цифры которого нечетные. Юноша рассовал их, как попало, в 4 класса. Но потом 2 марки переместил из второго класса в первый, вынул половину количества марок, вложенных в третий класс, половину вынутого подарил сестренке Юле, остальные поместил в четвертый класс, тем самым вдвое увеличив количество марок, первоначально сунутых в четвертый класс.

В результате количество марок в каждом классе оказалось одинаковым.

Сколько марок в коллекции юноши?

5. ГОСПОЖА ИХТИОЛОГ

разводит рыб. Как-то понадобилось ей узнать, сколько штук рыбин, пригодных для улова, обитает в водном пространстве ее пруда. Пригодными для улова считаются те рыбины, которые не могут выскользнуть из рыболовной сети, имеющей отверстия определенного размера. В воде рыб не пересчитаешь и из воды их всех не вытащишь. Как быть? Эврика!

Закинула в воду рыболовную сеть. Улов составил 38 рыбин нужного размера.

Госпожа рыбовод быстро сделала несмываемую пометку на каждой рыбине и всех их вернула в воду пруда. Закинула сеть вторично. На этот раз улов составил 53 рыбины, из них две меченые.

Как по этим результатам госпожа рыбовод вычислила, сколько рыбин, пригодных для улова, населяло воды ее пруда на день эксперимента?

6. ПРОГРАММИСТ

Математик-программист принес домой 5 дынь, имеющих неразличимые на взгляд размеры. Вспомнив, что в числе купленных дынь нет даже двух одинаковых по весу, чудака-программист решил расположить их в порядке убывающих тяжестей. Он взял двухчашечные весы старого образца — без гирь (домашние ЭВМ еще не появились) и задумался над составлением «оптимальной» программы своих действий (программист и дома программист!). Оказалось, что даже при самых «невезучих» ситуациях упорядочить расположение дынь возможно не более чем в 7 операций сравнения их весов. Как надо действовать?

7. КЛАДОВЩИК

В кладовой на полке стоят 11 одинаковых коробок, содержащих по одинаковому количеству n одних и тех же деталей, $n > 10$. В каждой из 10 коробок все детали стандартные, одинаковые по весу, а в одной коробке все детали тоже одинаковые по весу, но нестандартные.

Потребовали у кладовщика коробку с нестандартными деталями, а он, чудака, никак не может вспомнить, в которой из одиннадцати коробок находятся нестандартные детали, а также — немного тяжелее они или немного легче стандартных. Вышел из затруднительного положения кладовщик при помощи всего лишь двух взвешиваний на чашечных весах без гирь, но со стрелкой и шкалой с делениями. Он вспомнил, что когда клал стандартную деталь на одну чашку весов, а любую нестандартную — на другую чашку, то стрелка отклонялась ровно на одно деление.

Кладовщик мог вынимать детали из любой коробки, так как все коробки открыты, и на чашки весов, если потребуется, мог ставить сразу несколько коробок с деталями.

Рассуждения и действия чудака-кладовщика по отысканию коробки с нестандартными деталями были также нестандартны.

Восстановите ход его мысли и способ взвешивания.

8. СТУДЕНТ-ЛОГИК

Знаменитый английский математик, логик, философ, Бертран Рассел (1872-1970), считавший логику приоритетной сущностью математики, охарактеризовал математику, как «... предмет, в котором мы никогда не знаем, о чем говорим, и верно ли то, о чем говорим» («... the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true»).

Раздумье о философском смысле своеобразного афоризма Рассела не отвлекло, однако, нашего студента-логика от его хобби — коллекционирования парадоксов, софизмов, так сказать, кажущихся возможностей или кажущихся невозможностей, и придумывания причудливых, но разрешимых логических задач, например:

если A не есть X , тогда C не есть Y ,
если B есть либо Y , либо Z , тогда A есть X ,
если C не есть T , тогда B есть Z ,
если D есть Y , тогда B не есть X ,
если D не есть X , тогда B есть X .

Так рассказано о том, что каждый из объектов A, B, C, D имеет тождественный ему объект X , или Y , или Z , или T , а который которому тождественен — вот это и предлагается вам установить.



9. ЗАКРОЙЩИК

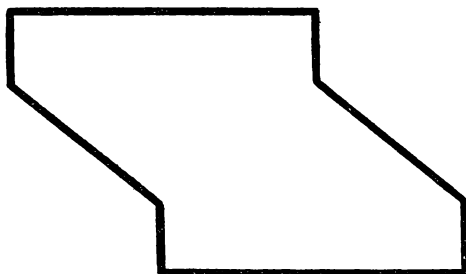
Очарованный знаменитой картиной художника Малевича «Черный квадрат», мой друг, закройщик-конструктивист, нарисовал на куске картона замысловатую фигуру (рис.), назвал свое творение «Брат квадрата» и пояснил загадкой:

Попарно у него углы равны,
Из них два — острых, два — тупых,
И с незапамятных времен
Гордится равенством сторон.

Тут я вспомнил «смешинку» Козьмы Пруtkова: «Если на клетке слона прочтешь надпись “буйвол” — не верь глазам своим» («Мысли и афоризмы»).

Аккуратно перерисуйте этого «брата» на свой лист плотной бумаги и, перекроив, верните ему его натуральную геометрическую форму. Для требуемого раскроя достаточно одного взмаха ножниц!

Какому семейству четырехугольников принадлежат оба «брата»?



10. УЧЕНИК-ГЕОМЕТР

Однажды на уроке геометрии учитель предложил задачу «на построение». Нарисована окружность (ее центр не указан), на которой отмечена точка A . Требуется найти диаметрально противоположную точку B .

— Можно вместо циркуля, — спросил учителя мой юный геометр, — я воспользуюсь одной круглой монетой, ведь все равно центр окружности не указан?

Учитель позволил, но потребовал дать обоснованное решение. В результате глубоких размышлений ученик с помощью монеты:

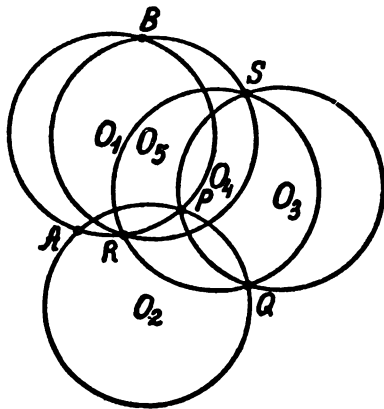
1) построил окружность O_1 и отметил на ней произвольную точку A (рис. внизу),

2) с помощью той же монеты провел окружность O_2 , пересекающую окружность O_1 в точке A и в какой-то точке P ,

3) через точку P провел окружность O_3 , пересекающую O_2 в какой-либо точке Q ,

4) через точку Q провел окружность O_4 , пересекающую O_1 в какой-либо точке R , а окружность O_3 в какой-либо точке S ,

5) приложил монету к точкам R и S так, чтобы проведенная с помощью монеты окружность O_5 прошла через эти точки. Пересечение окружностей O_5 и O_1 дало искомую точку B .



При обосновании построения ученик отметил попутно, что если какие-то равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и N , то O_1MO_2N — ромб.

Дома, пользуясь той же монетой, наш юный геометр

а) построил окружность, касающуюся заданной — «монетной» окружности в произвольно выбранной на ней точке,

б) при заданном луче OA построил точку B , принадлежащую воображаемому лучу OB , составляющему с лучом OA угол 30° .

Воспроизведите ход рассуждений юного геометра, если и вас увлек такой необычный прием решения задачи «на построение».

Как вы решили бы задачу учителя классическим приемом — с помощью циркуля и линейки?

ВРОДЕ БЫ УБЕДИТЕЛЬНОЕ

объяснение хозяина таверны, как он решил задачу о размещении этих десяти чудаков в девяти комнатах так, что каждый из них получил отдельную комнату...

Их было десять чудаков,
Тех путников усталых,
Что в дверь решили постучать
Таверны «Славный малый».

— Пусти, хозяин, ночевать,
Не будешь ты в убытке,
Нам только ночку переспать,
Промокли мы до нитки.

Хозяин тем гостям был рад,
Да вот беда некстати:
Лишь девять комнат у него
И девять лишь кроватей.

Восьми гостям я предложу
Постели честь по чести,

А двум придется ночь проспать
В одной кровати вместе.

Лишь он сказал, и сразу крик,
От гнева красны лица:
Никто из всех десяти
Не хочет потесниться.

Как охладить страстей тех пыл,
Умерить те волнения?
Но старый плут хозяин был
И разрешил сомненья.

Двух первых путников пока,
Чтоб не судили строго,
Просил пройти он в номер «А»
И подождать немного.

Спал третий в «Б», четвертый в «В»,
В «Г» спал всю ночь наш пятый,
В «Д», «Е», «Ж», «З» нашли ночлег
С шестого по девятый.

Потом, вернувшись снова в «А»,
Где ждали его двое,
Он ключ от «И» вручить был рад
Десятому герою.

Хоть много лет с тех пор прошло,
Неясно никому,
Как смог хозяин разместить
Гостей по одному.

Иль арифметика стара,
Иль чудо перед нами,
Понять, что, как и почему,
Вы постарайтесь сами.

*Из английского журнала прошлого века
(перевод Юлия Данилова)*

11. КАПИТАН И ЕГО СЫН

Это был новогодний сюрприз, присланный капитаном дальнего плавания своему сыну, — шкатулка, которая открывается только после того, как с помощью шести дисков с полным комплектом цифр на каждом будет набрано некоторое кодовое шестизначное число вида ****0*. (Ну не чудак ли?) Пятая цифра известна — ноль, а все остальные цифры зашифрованы звездочками.

В сопроводительном письме сыну капитан писал: «... Кодовое число одновременно указывает и величину содержимого шкатулки (в долларах). Возьми себе $\frac{1}{**}$ часть денег на книги и каникулярные развлечения, а остальные отдай маме на хозяйственные расходы. Когда содержимое шкатулки (число ****0*) будешь делить на знаменатель указанной дроби (**), то в частном получишь четырехзначное число, а процесс деления будет иметь такой вид:

$$\begin{array}{r}
 ****0* \quad | \quad ** \\
 \hline
 ** \quad | \quad **** \\
 \hline
 *** \\
 **1 \\
 \hline
 ** \\
 2* \\
 0
 \end{array}$$

Если проявишь находчивость и остроумие, то, расшифровав указанную операцию деления, найдешь и кодовое число, открывающее шкатулку...»

Все одноклассники сына капитана дальнего плавания включились в поиски «изюминки», заложенной веселым капитаном в задачу. Пока, увы, — безуспешно. Более того, многие пришли к заключению о неправильности в записи действий. Некоторые, впрочем, полагали, что «изюминка» — в преднамеренно допущенной опiske, которую и надо выявить. Например, не лишний ли «хвостик» у двойки? Если его убрать, то на месте двойки окажется девятка, и тогда удается найти даже два решения. Одно из них —

$$\begin{array}{r}
 101409 \quad | \quad 33 \\
 \underline{99} \quad | \quad 3073 \\
 240 \\
 \underline{231} \\
 99 \\
 \underline{99} \\
 0
 \end{array}$$

Найдите второе решение.

Другая версия «описки» исходила из предположения, что ноль в качестве пятой цифры нужен только для набора кодового числа, в действительности он маскирует запятую в записи числа. Если этот ноль в записи делимого заменить запятой, а оставшиеся звездочки сблизить, то получится деление десятичной дроби на целое число, и запись действий принимает вид:

$$\begin{array}{r}
 ****,* \quad | \quad ** \\
 \underline{**} \quad | \quad ***,* \\
 *** \\
 \underline{**1} \\
 ** \\
 \underline{2*} \\
 0
 \end{array}$$

Сторонники этой версии также нашли два варианта расшифровки приведенной записи. Какие?

К сожалению, ни одно из четырех решений, найденных ребятами, не открыло шкаτούлки.

Значит «изюминка» задачи капитана не в описке.

А в чем же?

В посылке капитана был еще один листок. Капитан писал сыну, что их штурман, который, кстати, помог сделать шкаτούлку, показывает своим товарищам забавный числовой фокус: он четыре раза складывает одинаковые числа и каждый раз получает новый результат:

$$\begin{array}{r}
 + 267 \\
 \underline{267} \\
 534
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 + 267 \\
 \underline{267} \\
 545
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 + 267 \\
 \underline{267} \\
 556
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 + 267 \\
 \underline{267} \\
 512
 \end{array}$$

При этом штурман клянется, что суммы найдены честно и безошибочно. Весь класс до сих пор не раскрыл секрет этого фокуса и задачи капитана. А вам подскажу, что математическая основа фокуса штурмана и делимости в целых числах в задаче капитана — одна и та же.

12. ВЫЧИСЛИТЕЛЬ-ВЫДУМЩИК

Табло его карманного калькулятора не вмещает точный 12-значный результат возведения в квадрат числа, имеющего 6 и более цифр.

Тогда, рассердившись, наш выдумщик начал что-то мудрить на листе бумаги: умножал вроде бы как обычно, но промежуточные результаты формировал по чудному, — как узор сплетал. Тем не менее, представьте, «сплетенный» результат оказался правильным:

$$\begin{array}{rcl}
 & & 987654^2 = \\
 (9 \cdot 8 \ 8 \cdot 7 \ 7 \cdot 6 \ 6 \cdot 5 \ 5 \cdot 4) & \rightarrow & 7 \ 2 \ 5 \ 6 \ 4 \ 2 \ 3 \ 0 \ 2 \ 0 \\
 (9 \cdot 7 \ 8 \cdot 6 \ 7 \cdot 5 \ 6 \cdot 4) & \rightarrow & 6 \ 3 \ 4 \ 8 \ 3 \ 5 \ 2 \ 4 \\
 (9 \cdot 6 \ 8 \cdot 5 \ 7 \cdot 4) & \rightarrow & 5 \ 4 \ 4 \ 0 \ 2 \ 8 \\
 (9 \cdot 5 \ 8 \cdot 4) & \rightarrow & 4 \ 5 \ 3 \ 2 \\
 (9 \cdot 4) & \rightarrow & 3 \ 6 \\
 & & \hline
 & & 7 \ 9 \ 5 \ 0 \ 5 \ 5 \ 3 \ 0 \ 6 \ 0 \\
 + & & 7 \ 9 \ 5 \ 0 \ 5 \ 5 \ 3 \ 0 \ 6 \ 0 \\
 & & \hline
 987654^2 & = & 8 \ 1 \ 6 \ 4 \ 4 \ 9 \ 3 \ 6 \ 2 \ 5 \ 1 \ 6 \\
 & & \hline
 & & 9 \ 7 \ 5 \ 4 \ 6 \ 0 \ 4 \ 2 \ 3 \ 7 \ 1 \ 6
 \end{array}$$

складываем

— эту сумму
повторяем и
прибавляем число,
«сотканное» из
квадратов цифр
исходного числа.

(Произведение вида $2 \cdot 3$, $7 \cdot 1$, $2 \cdot 2$ надо записывать как 06, 07, 04.)

Проверьте действенность этого забавно-элегантного приема возведения в квадрат на других многозначных числах.

ОСЕЛ (OSEL) НА КАЛЬКУЛЯТОРЕ

Наш выдумщик, в свободное от вычислений время, развлекается превращением последовательности цифр, возникающих на табло его калькулятора, в осмысленные слова с начертанием их латинскими буквами.

Как? Забавно: набрав на табло нужную последовательность цифр, поворачивает калькулятор на 180° ; при этом цифры 0, 1, 3, 4, 5, 7 и 9 воспринимаются как буквы соответственно: O, J, E, h, S, L и G — убедитесь!

Нажимая клавиши калькулятора, наберите на табло, например, последовательность цифр: (7, 3, 5, 0) и поверните калькулятор на 180° . Какое слово образуется на табло?

Верно: *OSEL*. Вот вам и «осел на калькуляторе»!

Задачи. 1. Прочтите на индикаторе калькулятора, повернутого на 180° , немецкое слово:

(3, 0, 0, 0, 0, +, 0, 5, 5, 0, 5, =), означающее приправу.

2. Что случилось с «рок-звездой» и в каком городе, если от длительного исполнения рок-песен в городе (1 0 7 5 0 — цифра 1 вместо запятой) «рок-звезда» потерял (50709), и (40790).

А теперь полюбуйтесь, как иногда наш вычислитель-чудак-весельчак складывает числа. Например, сумму

$\sum_{i=1}^n U_i$, где $U_1 = 3$, $U_2 = 9$, $U_3 = 13$, $U_4 = 20$, $U_5 = 31$, он

вычисляет так: составляет таблицу разностей складываемых чисел,

$$\begin{array}{rrrrr}
 3 & 9 & 13 & 20 & 31 \\
 \underline{6} & 4 & 7 & 11 & \\
 -2 & 3 & 4 & & \\
 \underline{5} & 1 & & & \\
 -4 & & & &
 \end{array}$$

подчеркивает первые разности в каждой строке, обозначает их соответственно

$$d_1, d_2, \dots, d_{n-1}.$$

В соответствии с числом (n) слагаемых (здесь $n = 5$) вычисляет 5 «коэффициентов»: $C_5^1 = 5$, $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$, $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$, $C_5^4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$, $C_5^5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1$ и далее по формуле

$$\sum_{i=1}^n U_i = C_n^1 U_1 + C_n^2 d_1 + C_n^3 d_2 + \dots + C_n^n d_{n-1}. \quad (1)$$

В данном примере:

$$\sum_{i=1}^5 U_i = 5 \cdot 3 + 10 \cdot 6 + 10 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) = 76.$$

Прямой подсчет был бы короче, скажете вы. Справедливо. И все-таки не спешите высмеивать формулу (1). Она хороша в тех случаях, когда довольно рано образуется строка нулевых разностей.

Например, смотрите-ка как быстро формула (1) преобразуется в более удобную разновидность — в знакомые, возможно многим из вас, формулы для сумм квадратов, кубов n натуральных чисел, для

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) \quad \text{и т.п.}$$

Для $\sum_{k=1}^n k^2$ таблица разностей такова:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 4 & 9 & 16 & \dots & & \\ & 3 & 5 & 7 & & & \\ & & 2 & 2 & & & \end{array}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^n k^2 = n \cdot 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cdot 2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (2)$$

Для $\sum_{k=1}^n k^3$ таблица разностей такова:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & \dots \\ 7 & 19 & 37 & 61 & & \\ 12 & 18 & 24 & & & \\ 6 & 6 & & & & \end{array}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^n k^3 = C_n^1 \cdot 1 + C_n^2 \cdot 7 + C_n^3 \cdot 12 + C_n^4 \cdot 6 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \quad (3)$$

Так как $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1+2+3+\dots+n)^2$,
то получаем еще одно классическое соотношение:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = (1+2+3+\dots+n)^2. \quad (4)$$

Для $\sum_{k=1}^n k(k+1)$ таблица разностей такова:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 6 & 12 & 20 & \dots \\ 4 & 6 & 8 & & \\ 2 & 2 & & & \end{array}$$

Тогда

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \\ = C_n^1 \cdot 2 + C_n^2 \cdot 4 + C_n^3 \cdot 2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned} \quad (5)$$

Задача 3. Вывести формулу $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

используя формулу $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ и такой забавный числовой треугольник:

```

      1
     2 2
    3 3 3
   4 4 4 4
  .....
 n ..... n.

```

13. НАЗОЙЛИВЫЙ ТРИНАДЦАТЫЙ

Быть под номером «чертовой дюжины» не пожелал никто из чудаков. Так пусть будет тринадцатым сам Черт (Он же — Бес, Дьявол, Сатана, Мефистофель), еще в былые времена бесцеремонно забиравшийся на страницы гениальных произведений. Так у Гоголя однажды, в «Ночь перед Рождеством», черт украл Луну с неба, у Гете Мефистофель выменял молодость на душу Фауста, у Достоевского Черт довел Ивана Карамазова до галлюцинаций и «раздвоения личности», у Булгакова он, перевоплотившись в Воланда, уволок Маргариту на «шашаш ведьм и бал Сатаны», и т.д.

И не дьявольскими ли «шуточками» объясняется таинственная связь между числом 13 и творческой биографией великого немецкого композитора Рихарда Вагнера, создателя «бесовского» стиля в симфонической музыке:

1) Его имя и фамилия — Richard Wagner — содержит 13 букв.

2) Сумма цифр года рождения (1813) равна 13.

3) Вагнер сочинил 13 музыкальных драм.

4) «Тангейзер» — одна из лучших его опер — была завершена 13 апреля 1845 г. и впервые исполнена на сцене 13 марта 1861 г. В Париже опера вызвала громкий скандал, но вторичная постановка оперы там же 13 мая 1895 г. принесла Вагнеру большой успех.

5) Композиция «Парсифаль» была закончена им 13 января 1882 г.

6) Создание оперы «Лоэнгрин» завершилось в 1848 г, но в театральной постановке услышал свое произведение Вагнер только 13 лет спустя — в 1861 г.

7) Театр в Риге, где Вагнер начинал капельмейстером, открылся 13 сентября 1837 г.

8) Изгнание Вагнера из Германии длилось 13 лет.

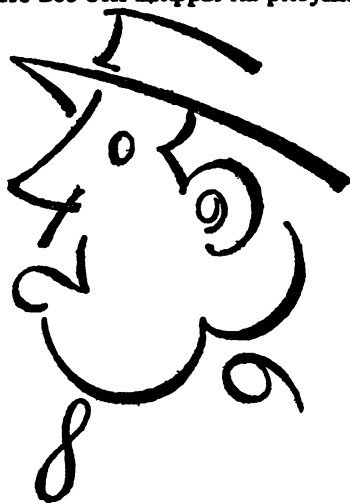
9) Лист посетил Вагнера в последний раз в Венеции 13 января 1883 г.

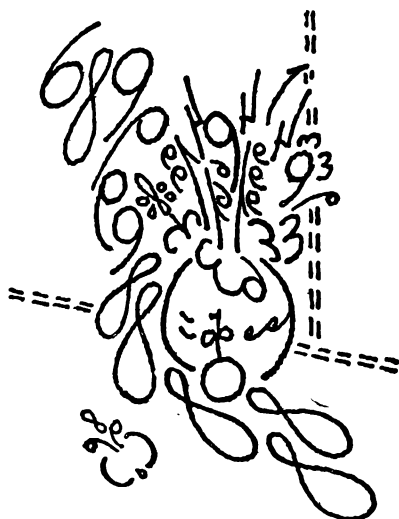
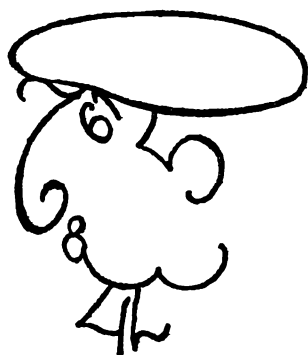
10) Умер Вагнер 13 февраля 1883 г.

11) Первая и последняя цифры года рождения и года смерти образуют число 13.

* * *

А теперь и меня «черт попутал» — соблазнил представившейся возможностью воспроизвести на страницах «Математической завалялки» несколько силуэтов (рис. на с. 219), вырезанных из газеты «Вечерняя Москва». Завлекательность их в том, что они искусно сформированы только из цифр. Впрочем, разрешается применять и математические знаки: плюс, минус, скобки, знаки интеграла, умножения и равенства. Иногда автору рисунка удавалось использовать все 10 цифр — от 0 до 9, например, как в цифровом шарже на Юрия Владимировича Никулина. Найдите все эти цифры на рисунке.





Если кого-то увлекло рисование цифрами и математическими знаками, — присылайте свои произведения в редакцию «Вечерней Москвы». Отберем наиболее оригинальные и по просьбе моего Тринадцатого доведем до 13 число рисунков, помещенных на страницы последующих изданий «Математической загляделки».

Кроме того догадайтесь, почему, наряду с приглашением рисовать цифрами, я попросил художника поместить именно на эту же страницу книги фигурный ребус — «орнамент», прибывший из США.

Найдите общее геометрическое свойство у пяти нарисованных звеньев «орнамента», постарайтесь подметить закономерный прием их формирования и в том же «стиле» нарисовать хотя бы одно — следующее — звено «орнамента».



На прощанье, наш незванный гость — Тринадцатый — с саркастической улыбкой предлагает вам определить наивысшую возможную числовую оценку заслугам автора книги, найдя в цифровом ребусе числовое значение произведения:

$$Б \cdot А \cdot К \cdot О \cdot Р \cdot Д \cdot Е \cdot М \cdot С \cdot К \cdot И \cdot Й = ?$$

И Тринадцатый мой
Так доволен собой,
Что помчался домой
Как заправский герой.

РЕШЕНИЯ

1. ЧУДАК-РЫБАК

Пружина весов растягивается под действием веса рыбы и равной ему силы натяжения бечевки по другую сторону блока.

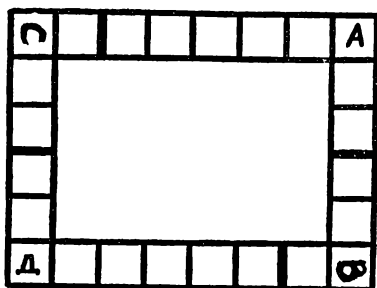
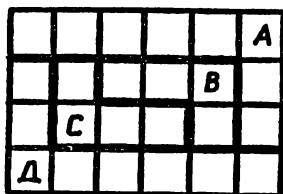
Следовательно, сом весит 7,5 кг, если считать блок и бечевку невесомыми.

2. КУЛИНАРКА

«Пустить» 4-минутные и 7-минутные песочные часы одновременно. Первые вновь опрокинуть немедленно после их «остановки» (через 4 минуты). Пройдет еще 3 минуты — «остановятся» вторые часы. Немедленно их опрокинуть. Когда через минуту опустеет верхняя колбочка первых часов (всего пройдет 8 минут), опрокинуть вторые. Там отсыпался песок, отмечающий 1 минуту. После опрокидывания вторых часов, этот песок вернется в ту колбочку, где был за минуту до этого — так закончится последняя, 9-я минута.

3. ХУДОЖНИК-АБСТРАКЦИОНИСТ

Решение на рисунке на странице 222. Линии разреза жирные.



4. КОЛЛЕКЦИОНЕР

99 марок. Если после перекладывания в каждом классе оказалось по x марок, то первоначально было: $x - 2$, $x + 2$, $2x$, $\frac{x}{2}$. Всего $\frac{9x}{2}$ марок, где x — четное, но такое, что $\frac{9x}{2}$ — число двузначное с нечетными цифрами (следует из условия). Единственно подходящее значение $x = 22$.

Всего марок было 99 с первоначальным распределением по классерам: 20, 24, 44, 11.

5. ГОСПОЖА ИХТИОЛОГ

Пусть x — число рыбин в пруду, годных для улова данной сетью. Тогда отношение числа меченых рыб к числу всех рыб равно $\frac{38}{x}$. Во второй раз ихтиолог выловила 53 рыбины, из них две — меченые. Следовательно, отношение числа меченых рыбин к числу выловленных рыб равно $\frac{2}{53}$. Будем предполагать, что меченые рыбины равномерно распределились среди всех рыб в пруду, тогда оба отношения одинаковы: $\frac{38}{x} = \frac{2}{53}$, откуда $x = 1007$. Значит, в пруду имеется примерно тысяча рыбин.

6. ПРОГРАММИСТ

1. Кладем на чашки весов по одной, произвольно взятой дыне и более тяжелую отметим ярлыком «Т», а другую — ярлыком «Л».

2. Аналогично действуем с любыми двумя дынями из оставшихся трех; отметим их ярлыками «Т₁» и «Л₁».

3. Сравним дыни «Т» и «Т₁». Пусть, для определенности, $T > T_1$. Три дыни упорядочены: «Т», «Т₁», «Л₁»; дыню «Л» отложим в сторону.

4 и 5. Самое большее за две операции сравнения тяжелой дынь можно определить место последней неотмеченной дыни в последовательности «Т», «Т₁», «Л₁».

6 и 7. Зная, что отложенная дыня «Л» легче, чем дыня «Т», самое большее за две операции сравнения точно устанавливаем и ее место.

7. КЛАДОВЩИК

Первое взвешивание. Перенумеруем коробки и первые 5 поставим на левую чашку весов, следующие 5 — на правую.

Если — равновесие, то нестандартные детали — в коробке № 11. Если равновесия нет, то коробка № 11 содержит стандартные детали. При этом допустим, для определенности, что вниз пошла левая чашка весов (стрелка весов отклонилась влево).

Второе взвешивание. Уберем коробку № 1 с левой чашки и коробку № 10 — с правой. Заменяем одну деталь из коробки № 3 одной деталью из коробки № 11, то есть заведомо стандартной, две детали из № 4 — двумя деталями из № 11, три детали из № 5 — тремя деталями из № 11; заменяем 4 детали из № 6, 5 деталей из № 7, 6 деталей из № 8 и 7 деталей из № 9 соответственно таким же количеством деталей из № 11.

Тогда, если

а) стрелка весов отклонилась влево на столько же делений, как и при первом взвешивании, то нестандартные детали — в коробке № 2 (и более тяжелые);

б) равновесие, то нестандартные детали — в коробке № 1 (и более тяжелые);

в) отклонение уменьшилось на одно деление или на два, то нестандартные детали соответственно — в коробке № 3, или № 4 (и более тяжелые);

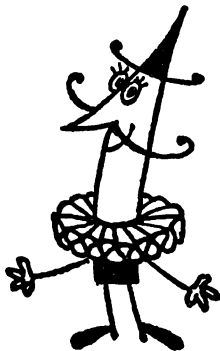
г) отклонение уменьшилось на 4, 5, 6, 7 делений, то нестандартные детали соответственно — в коробке № 6, № 7, № 8, № 9 (и более легкие);

д) отклонение уменьшилось на 3 или на $n - 3$ деления, где n — число деталей в коробке, то нестандартные детали соответственно — в коробке № 5 или № 10 (по условию $n > 10$).

8. СТУДЕНТ-ЛОГИК

В скобках — пары тождественных объектов

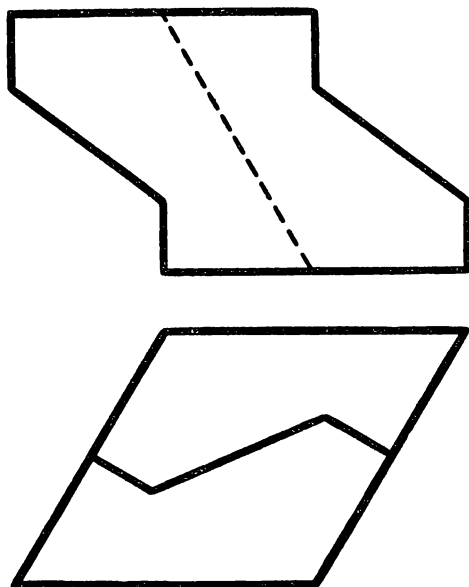
$$(A \equiv Y), (B \equiv X), \\ (C \equiv T), (D \equiv Z).$$

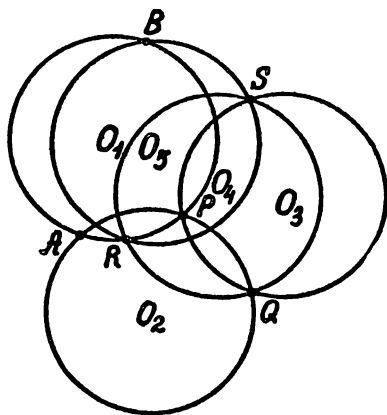


9. ЗАКРОЙЩИК

На рисунке показаны: линия разреза (пунктир) нарисованного «брата квадрата» и рядом — другой его брат ромб, составленный из двух частей, образовавшихся в результате раскроя.

Оба «брата» принадлежат семейству параллелограммов.





10. УЧЕНИК-ГЕОМЕТР

Вообразим, что O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 — центры (см. рис.) последовательно вычерчиваемых окружностей («монетных»). Тогда O_1AO_2P — ромб и мы имеем: $O_1A \# PO_2^*$. Аналогично, пара окружностей O_2 и O_3 дает: $PO_2 \# O_3Q$. Далее: $O_3Q \# RO_4$, $RO_4 \# O_5S$ и, наконец, $O_5S \# BO_1$. Получаем: $O_1A \# BO_1$, откуда и следует, что точка B — диаметрально противоположна точке A .

11. КАПИТАН И ЕГО СЫН

Второе решение в предположении описки (9 на месте цифры 2): $102508 : 49 = 2092$.

Два решения в предположении, что в делимом запятая вместо нуля (****,*): $8963,9 : 29 = 309,1$ и $2463,3 : 23 = 107,1$.

* Запись $O_1A \# PO_2$ означает равенство и параллельность отрезков O_1A и PO_2 .

В действительности в записи деления описки нет. Капитан вложил в шкатулку 272 доллара, а деление $(272 : 8 = 34)$ и запись кодового числа выполнил в троичной системе счисления:

$$101002_3 : 22_3 = 1021_3.$$

Чтобы получить это решение, следовало испытать все двузначные числа (делитель), записанные в троичной системе счисления, произведение каждого из которых на 1 и 2 имеет вид 2^* и $**1$.

В «фокусе сложения» использованы соответственно системы счисления с основанием 10, 9, 8, 12.

12. ВЫЧИСЛИТЕЛЬ-ВЫДУМЩИК. ОСЕЛ (OSEL) НА КАЛЬКУЛЯТОРЕ

Задачи.

1. SOSSE — соус.
2. В городе ОСЛО, «рок-звезда» потерял ГОЛОС и ОГЛОХ.
3. Пусть $S_n = 1 + 2 + \dots + n$. Складывая элементы таблицы по горизонталям и вертикалям, получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^n n^2 &= nS_n - (S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1}) = \\ &= \frac{n^2(1+n)}{2} - \left(1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{(n-1)n}{2}\right) \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой (5) на с. 216, тогда

$$\sum_{n=1}^n n^2 = \frac{n^2(1+n)}{2} - \frac{(n-1)n(n+1)}{2 \cdot 3},$$

откуда

$$\sum_{n=1}^n n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

13. НАЗОЙЛИВЫЙ ТРИНАДЦАТЫЙ

Каждая из пяти фигур (см. рис. на с. 220) имеет вертикальную ось симметрии. Если вдоль этой оси мысленно разрезать каждую фигуру и присмотреться к правым половинкам, то станут явно заметными цифры 1, 2, 3, 4, 5.

Значит, следующая фигура должна иметь вид шестерки с ее зеркальным отражением в вертикальной оси симметрии:

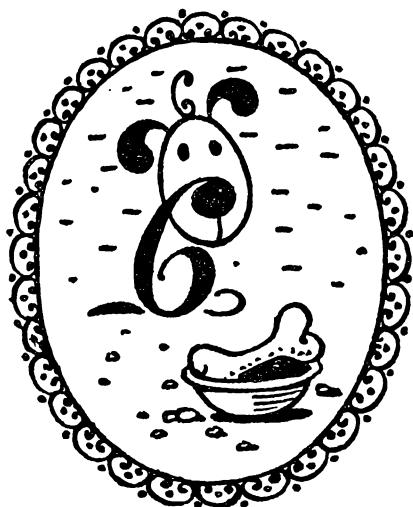


и т.д.

Решение ребуса: так как в заданном произведении 10 различных букв, то сомножителями должны быть все 10 однозначных чисел, включая НУЛЬ, а потому 0 — единственно возможный результат умножения. Все заслуги автора Черт оценил нулем.

Ну и черт с ним!





М2ЛЕНЬКІЕ
Т2ЙНЫ ЧИСЕЛ
И ФИГУР

Математика рождалась одновременно
из арифметики и геометрии.

А.Д. Александров

(Но...)

Беспокойство — это свойство весны,
Беспокоиться всегда мы должны,
Ибо спеси мы смешной лишены,
Что задачи до одной решены...

Л. Мартынов

Их бесконечно много — этих неброских числовых и геометрических отношений, которые, однако, в достаточной мере вобрали в себя и «жар холодных чисел», и красоту геометрических абстракций. Пытливый взор «натуралиста»-математика обычно подмечает их.

«... Я СКРЫВАТЬ НЕ СТАНУ...»

1. Что тайна чисел 12 и — обращенного — 21 раскрыта: квадраты этих чисел — 144 и 441 — также взаимно обращенные числа. Не подберете ли еще хотя бы одну пару чисел с таким же свойством?

2. Что, если квадратное число (n^2) оканчивается на 25, например 625, то его третья цифра от конца — непременно четная, но не 4 и не 8. Все же надо бы это доказать, конечно, не примерами.

3. Что фигурки двух ребусов

$$(\bigcirc \square)^{\bigcirc} = \triangle \parallel \square \square \square$$

$$(\triangle \triangle)^{\square} = \triangle \square \square \triangle$$

— как бы спрашивают вас:

а) Какая степень двузначного числа имеет «хвостик» из трех одинаковых цифр (первый ребус)?

б) Какая степень двузначного числа с одинаковыми цифрами является палиндромическим числом, то есть числом, равным обращенному (второй ребус)?

4. Что «нет правила без исключений» подчас не только у людей, но и в семействе целых чисел и геометрических фигур.

Попробуйте, к примеру, препарировать целое число для представления в виде разности квадратов — сразу выявятся и «правило», и «исключения»:

$$1 = 1^2 - 0^2$$

$$5 = 3^2 - 2^2$$

$$9 = 5^2 - 4^2$$

$$2$$

$$6$$

$$10$$

$$3 = 2^2 - 1^2$$

$$7 = 4^2 - 3^2$$

$$11 = 6^2 - 5^2$$

$$4 = 2^2 - 0^2$$

$$8 = 3^2 - 1^2$$

$$12 = 4^2 - 2^2$$

.....

Немного пристального внимания и возникает гипотеза: всякое $n \in N$, за исключением четных чисел вида $2(2n - 1)$, представимо в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

То, что $2(2n - 1) \neq x^2 - y^2$, $x, y \in N$, легко доказывается «от противного». Пусть $2(2n - 1) = 2k \cdot m$, где k и m — нечетные. Предположим, что $2km = x^2 - y^2 = (x - y) \times (x + y)$.

Тогда

$$\begin{cases} x - y = 2k \\ x + y = m, \end{cases} \Rightarrow x = k + \frac{m}{2} \Rightarrow m - \text{четное. Противоречие!}$$

Для всех остальных натуральных чисел, то есть четных вида $4n$ и всех нечетных, справедливы тождества:

$$4n = (n+1)^2 - (n-1)^2 \text{ и } 2n-1 = n^2 - (n-1)^2.$$

Убедитесь! Кое-что тайное стало явным!

Однако же, внимая забавному афоризму Байрона:

«наука есть обмен одних незнаний на другие»,

продолжим наблюдения над разностью квадратов натуральных чисел:

$$\begin{array}{lll} 4^2 - 1^2 = 3 \cdot 5 & 7^2 - 4^2 = 3 \cdot 11 & \\ 2^2 - 0^2 = 2 \cdot 2 & 5^2 - 2^2 = 3 \cdot 7 & 8^2 - 3^2 = 5 \cdot 11 \\ 3^2 - 0^2 = 3 \cdot 3 & 6^2 - 1^2 = 5 \cdot 7 & 9^2 - 2^2 = 7 \cdot 11 \\ & & \dots\dots\dots \end{array}$$

Замечаем: в правой части равенства оба сомножителя — простые числа. Так пробился родничок еще одной «любительской» гипотезы:

для любого натурального $x > 1$ можно подобрать натуральное y , такое, что $x^2 - y^2 = p_1 \cdot p_2$, где p_1, p_2 — простые числа.

Еще момент и новой гранью обернется эта гипотеза. Пусть $x - y = p_1$ и $x + y = p_2$.

Тогда $x = \frac{p_1 + p_2}{2}$, то есть

возможно, что любое число $x > 1$, взятое на оси натуральных чисел, является центром симметрии хотя бы одной пары простых чисел.

ЛЮБОВЬ С ПЕРВОГО ВЗГЛЯДА

В математике это — моментальное принятие правильного заключения при одном взгляде на представленное задание.

Такое возможно, разумеется, как реализация предварительно приобретенного богатства сведений о числах и фигурах.

Испытайте себя на «любовь с одного взгляда» к предложенным далее заданиям: дерзайте дать незамедлительные ответы с последующим обоснованием их правильности.

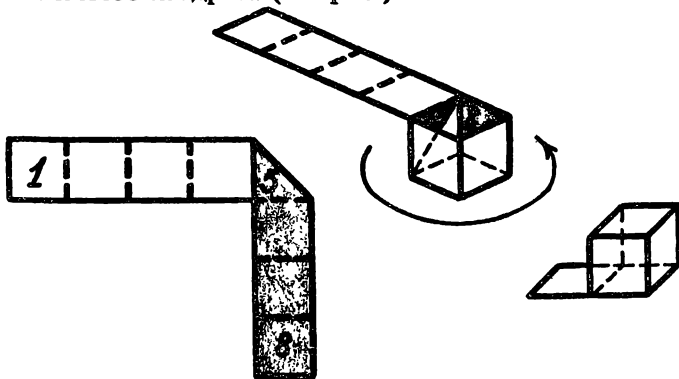
1. Какое из чисел 1992, 40835, 6887, 5348, 783 является точным квадратом?

2. Какую цифру нужно приписать слева к числу 425 и к числу 845, чтобы образовались точные квадраты?

3. Не вычисляя площадей треугольников, стороны которых 5, 5, 6 и 5, 5, 8, определите с одного взгляда — равновелики ли они, то есть равны ли их площади.

КУБИК ИЗ ПОЛОСКИ

Из листа бумаги (одна сторона — белая, другая — цветная) вырежьте прямоугольную полоску, длина которой в 8 раз больше ширины. Рассеките полоску пунктирными линиями на 8 равных квадратов и перегните ее по диагонали пятого квадрата (см. рис.).



Далее, сохраняя сделанный стиб, делайте новые стигбы полоски по пунктирным линиям под прямым углом и сомкните все квадраты, образуя форму кубика с ребром, равным ширине полоски. Все 6 граней кубика снаружи должны быть цветными. У сформированного кубика первый и восьмой квадратики подклейте (клеякой лентой) — кубик не развалится.

Младшим должно понравиться это развлечение.

КУБИК ИЗГОТОВЛЕН

Теперь занумеруйте 8 вершин кубика порядковыми числами (№ 1 — № 8) так, чтобы сумма номеров на каждой из шести его граней оказалась одинаковой.

ИСПОЛИН И ПИГМЕЙ

Исполином в данном случае является следующее число:

1639344262295081967213114754098360655737704918032787.

В нем 52 цифры.

— Вот удивил, — подумаете вы. — Нетрудно написать сколько угодно чисел и с большим количеством цифр.

Дело не в этом. У этого исполина превосходный характер. Он не доставит нам ни малейших хлопот, если надумаете умножить его на 71, а именно: перепишите все цифры исполинского числа в том же порядке и без ошибок, припишите 1 впереди, 7 — в конце числа и... произведение готово (обязательно проверьте!).

Самым младшим родственником этого исполина (пигмеем) является число 8. Чтобы умножить его на двузначный множитель 86, достаточно приписать 6 впереди, а 8 в конце числа. В самом деле, $8 \times 86 = 688$.

Велико ли это семейство чисел с таким милым характером в отношении двузначных множителей, по-видимому, никто и не выяснял.

Еще с одним членом семейства я встретился недавно. Это — 41096. При умножении на какое-то двузначное число \overline{ab} (a и b — цифры) получается, как и в предыдущих случаях: $41096 \times \overline{ab} = \overline{b41096a}$, то есть цифры множимого повторяются в произведении, цифра единиц множителя возглавляет произведение, а цифра десятков множителя становится хвостом произведения.

Найдите цифры a и b этого двузначного числа \overline{ab} .

ПРЕВРАЩЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА В ПРЯМОУГОЛЬНИК

Нарисуйте на листе бумаги произвольный треугольник и покажите, как надо его рассечь двумя прямолинейными разрезами на три части, из которых возможно было бы выложить прямоугольник.

ВСЕ МОГУТ... 10 ЦИФР

Цифры не управляют миром,
но показывают, как устроен мир.

И. Гете

1. Могут образовать, например, число 1 в виде суммы двух дробей, в которых задействованы все 10 цифр, каждая по одному разу: $\frac{35}{70} + \frac{148}{296} = 1$. В аналогичной манере могут сформировать даже 100. Как?

2. Могут образовать забавное соотношение из трех 10-значных чисел, каждое — с неповторяющимися цифрами:

$$9876543210 - 0123456789 = 9753086421,$$

причем первое из них — 9876543210 — наибольшее из возможных: всякая перестановка цифр в этом числе приводит непременно к меньшим числам. Не правда ли?

Если в этом числе выполнить все возможные перестановки цифр и исключить начинающиеся с нуля, то образуется огромное — более чем трехмиллионное семейство 10-значных чисел с неповторяющимися цифрами. Назовем его семейством «Ф».

В семействе «Ф» есть не менее 47 квадратных чисел (n^2). Правдоподобно предположить: одно из них — $1026753849 = 32043^2$ — наименьшее из возможных. Компьютер, производивший поиск таких чисел по программе А. Любенова и С. Милушева из г. Отара Загора, выявил 44 экземпляра для значений $n \in [31000; 65637]$.

Мне известны еще 3 числа для значений $65637 \leq n \leq 99100$. Одно из них я объявляю: $9814072356 = 99066^2$, по предположению — наибольшее из возможных квадратных чисел в семействе «Ф».

Поиск остальных двух предлагаю в качестве арифметического развлечения.

3. Однажды на улице Харбина я наблюдал, как слепой китаец, окруженный ребятишками-школьниками, безошибочно угадывал одну утаенную цифру результата сложения нескольких чисел. Слепец предлагал каждому из ребят написать любые два или три числа при условии, что в запись слагаемых войдут в совокупности все 10 цифр, каждая по одному разу. Например, я подглядел, один мальчик написал:

$$\begin{array}{r} 63108 \\ + 954 \\ \hline 72 \\ \hline 64134 \end{array}$$

Затем требовалось найти сумму и назвать цифры результата в любом порядке — все, кроме любой одной — утаенной.

Китаец моментально называл утаенную цифру результата.

Разгадайте секрет фокуса.

4. Красивый курьез: все 10 цифр расположились в две закономерные последовательности:

4 3 2 1 0 и 9 8 7 6 5,

затем вторая последовательность «вразрез» проникла в первую. Образовавшееся десятизначное число 4938271605 Шустрик удвоил и ... удивился. Что удивило его?

5. Существует двузначное число, квадрат и куб которого в совокупности порождают все 10 цифр, по одному разу каждую.

Найти такое число можно просчитав на калькуляторе квадраты и кубы всех «подозреваемых» чисел. Но их очень много и скучновато такое «развлечение». Признаем решение красивым, если вы обоснованно сведете к минимуму количество «претендентов» стать ответом. И найдете его.

ОБОЙДЕМСЯ БЕЗ НУЛЯ

Только, пожалуйста, не так, как «расправился» с нулями великий норвежский композитор Эдвард Григ в свои школьные годы. В автобиографии («Мой первый успех») Григ рассказывает о том, как однажды, когда ему задали задачу на умножение, он, для ускорения, пренебрег всеми нулями, встречавшимися по ходу выполнения действий. «В результате я потерпел полное фиаско. После этого, — иронизирует Григ, — я научился тащить все нули за собой. От них не избавишься».

У нас иная ситуация: нуля просто нет в нашем арсенале.

1. Из остальных девяти цифр вам предлагается сформировать десятизначное число так, чтобы трехзначное число (*a*) из первых трех цифр составляло третью часть числа (*b*) из последних трех цифр, а число (*c*) из средних трех цифр равнялось разности чисел *b* и *a*.

2. Курьез: $987654321 - 123456789 = 864197532$ — в каждом числе представлены все 9 цифр и каждая по одному разу.

3. Подаренные мне 9 томов «золотой библиотеки» занимательной математики, изданных АО «СТОЛЕТИЕ», я разместил на двух полках книжного шкафа, не соблюдая естественного порядка следования томов, — произвольно.

Моей гениальной внучке — отличнице Наташе достаточно было беглого взгляда на корешки книг, чтобы торжественно заявить.

— Смотрите, цифры на книжных корешках образуют дробь

$$\frac{13845}{2769},$$

в точности равную числу 5.

Затем, подойдя к полкам, она на верхней переставила том 8 на последнее место, на нижней — расставила тома в последовательности 6 7 2 9 и с улыбочкой спросила:

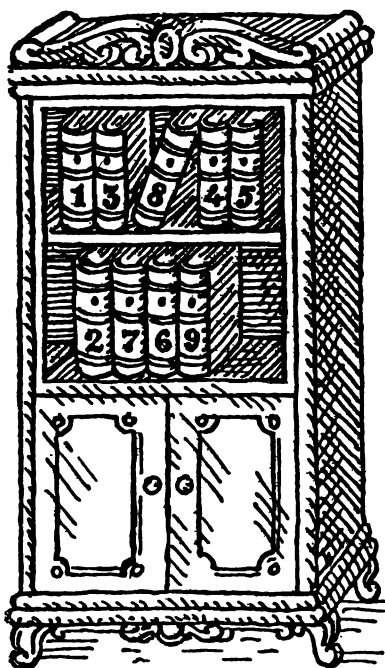
— Теперь какое целое число выражает новая дробь:

$$\frac{13458}{6729}?$$

Оказалось — 2. Далее внучка сняла с полок все 9 томов и окончательно «достала» меня неожиданным заданием:

— Заново подбери еще 6 возможных расстановок девяти томов на полках: 5 — на верхней, 4 — на нижней, чтобы образующиеся дроби точно выражали числа 3, 4, 6, 7, 8, 9.

Без вашей поддержки, боюсь, не справлюсь с заданной головоломкой поиска шести вариантов требуемой расстановки томов.



4. Поставив по 8 знаков «+» между цифрами каждой из двух последовательностей: 1 2 ... 8 9 и 9 8 ... 2 1, получим в результате по 45. Если расставлять не только «+», но и «-», то можно добиться получения тех же сумм (по 45), употребляя вдвое меньшее количество знаков «+» и «-». Цифры можете объединять в двузначные, трехзначные числа, сохраняя при этом порядок их следования.

5. Оксана Гусеница из Запорожья нашла исчерпывающие, по ее мнению, решения уравнений

$$\overline{ab} \cdot \overline{cde} = \overline{fghk} \text{ и } \alpha \cdot \overline{\beta\gamma\delta\epsilon} = \overline{\varphi\rho\eta\psi} -$$

в каждом равенстве представлены все 9 цифр без нуля.

Вот два решения из девяти, найденных ею:

$$39 \cdot 186 = 7254 \text{ и } 4 \cdot 1738 = 6952.$$

Остальные 7 решений Оксаны приведены в разделе «Решения». Но, полагаю, не заманчив ли поиск собственных результатов?!

6. Некто утверждает, что употребляя только 5 цифр (2, 3, 4, 5, 6), каждую по одному разу, с помощью арифметических действий можно выразить любое натуральное число от 1 до 1000, кроме чисел 821, 827, 831, 883, 887, 911, 929, 941.

Например,

$$\begin{aligned} 21 &= 4 \cdot (5 + 6) - 23, \\ 914 &= 26 \cdot 35 + 4, \\ 987 &= 5^4 + 362. \end{aligned}$$

7. Что-то забавное получается при умножении числа 12345679 на любое произведение из школьной таблицы умножения на 9, то есть на $1 \cdot 9 = 9$, $2 \cdot 9 = 18$, $3 \cdot 9 = 27$, $4 \cdot 9 = 36$ и т.д. до $9 \cdot 9 = 81$. Что же получается?

8. Заключительный курьез:

$$\sqrt{12345678987654321} = 111111111.$$

Проверку правильности всех его утверждений возлагаю на вас.

ДВЕ ВЕСЕЛЫЕ ТЕОРЕМЫ



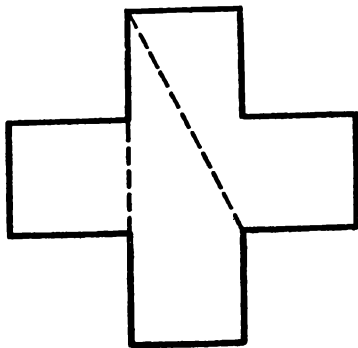
Первая — о жизни — якобы изобретена школьниками Новосибирска: «Площадь оценки жизненных явлений равна произведению заложенных в них основ на высоту сознания».

(В. Каверин в повести «Школьный спектакль»). Для «доказательства» теоремы достаточно лишь улыбнуться.

Вторая — из цикла «Геометрия помогает арифметике» — «Шустрику k лет, Мямлику m лет, Юлечке n лет. По меньшей мере двое из них ровесники, и вы это строго докажете, зная, что биссектриса внешнего угла треугольника со сторонами k , m и n параллельна его стороне».

ГОЛОВОЛОМКА НА ТЕМУ ПЕРЕСТРОЙКИ

Вырежьте из листа плотной бумаги модель эмблемы «скорой помощи» по контуру, охватывающему 5 равных квадратов: 4 — наружных и один — внутренний. Теперь эту



выкройку надо разрезать на 5 фигурок, из которых вы сможете выложить квадрат, или: прямоугольник, треугольник, параллелограмм, либо просто — четырехугольник с двумя прямыми, острым и тупым углами.

Для этого сначала отрежьте по пунктирному отрезку один квадратик. Вторая линия разреза так же показана пунктиром на рисунке. Перпендикулярно этому пунктиру надо наметить еще одну линию разреза, пересекающую контур эмблемы в трех точках (сообразите — каких?). Разрез вдоль этой линии отделит от модели эмблемы один треугольник и одну трапецию. Так образуется 5 фигур-деталей.

Уложите эти 5 деталей модели «красного креста» в коробочку и можете вовлекать своих друзей в решение «перестрочной» мини-головоломки.

РАЗЫСКИВАЮТСЯ ПОТЕРЯВШИЕСЯ ЧИСЛА

Нашедшему — вознаграждение: «5» за сообразительность!

1. Два «брата» — шестизначные числа со сходными приметами. У одного каждая цифра, начиная с третьей слева, равна произведению двух предыдущих цифр, из которых ни одна не нуль.

Приметы второго: наибольшее из тех шестизначных, у которых каждая цифра, начиная с третьей слева, равна сумме двух предыдущих цифр.



2. *Три числа.* Приметы: в сумме составляют 4426; когда в большем из них зачеркнешь цифру десятков, получится второе число, а зачеркнешь не цифру десятков, а цифру единиц, — получится третье из этой тройки разыскиваемых чисел.

3. *Четыре числа.* Приметы: четырехзначные, квадратные. Первое имеет вид \overline{aabb} , второе — $\overline{c(c-2)(c-1)(c+1)}$, третье и четвертое: одно, обращенное другому и, напоминая, оба — квадратные.

4. *Пара последовательных нечетных чисел и пара последовательных четных чисел.* Подозреваются в том, что сумма квадратов чисел первой пары равна сумме квадратов чисел второй пары.

Вы окажете неоценимую услугу органам розыска, если докажете, что во всем мире таких пар чисел нет и быть не может!

ОНО РАСТЕТ, ОСТАВАЯСЬ КВАДРАТНЫМ

Если Вам еще далеко не 25 лет, то Вы ежегодно подрастаете на несколько сантиметров. Моему квадратному числу уже 25, но и оно «растет» от приписывания по одной цифре слева, оставаясь при этом всякий раз числом квадратным, — сначала трехзначным $\overline{a25}$, затем четырехзначным $\overline{ba25}$, пятизначным $\overline{cba25}$ и, наконец, шестизначным $\overline{kcba25}$.

Найдите подходящие значения цифр a, b, c, k .

НЕУЖЕЛИ?

— Неужели сумма квадратов двух чисел может быть точно равной сумме кубов тех же чисел? $a^2 + b^2 = a^3 + b^3$?

— Ясно, что — нет, если a и b — натуральные числа (не оба равные единице). Если же допустить, что a и b — дробные, то, пожалуй, заманчиво поискать их.

— Мне бы столь пустяковые проблемы! Да я тебе в один момент изготовлю хоть сто, хоть тысячу дробей.

— И, представьте, действительно через пару минут без помощи компьютера «выдал» мне три пары «горяченьких» дробей:

$$\left(\frac{5}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^3 + \left(\frac{10}{9}\right)^3, \quad (1)$$

$$\left(\frac{5}{14}\right)^2 + \left(\frac{15}{14}\right)^2 = \left(\frac{5}{14}\right)^3 + \left(\frac{15}{14}\right)^3, \quad (2)$$

$$\left(\frac{17}{65}\right)^2 + \left(\frac{68}{65}\right)^2 = \left(\frac{17}{65}\right)^3 + \left(\frac{68}{65}\right)^3. \quad (3)$$

Какую технологию безкомпьютерного изготовления таких «веселеньких» дробей избрали бы вы?

СЕМЬ БЕД — ОДИН ОТВЕТ

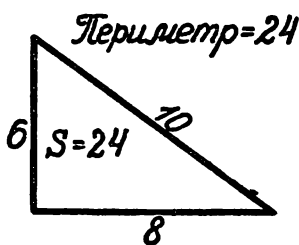
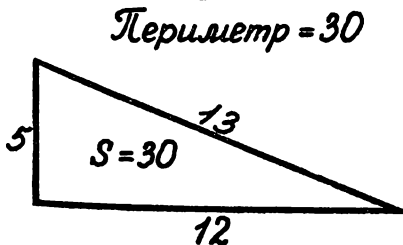
И в чайхане семь белых мудрецов
Семь истин мне откроют.

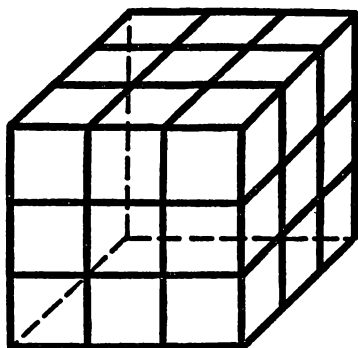
Раим Фархад

1. Может ли сумма натуральных чисел $1 + 2 + 3 + \dots + k$ при каком-либо значении k оканчиваться цифрой 4 или цифрой 9?

2. Существует ли целое число N , квадрат которого оканчивается двумя: а) единицами; б) пятерками; в) шестерками; г) девятками?

3. Два прямоугольных треугольника с целочисленными сторонами (рис.) примечательны лишь тем, что площадь каждого численно равна его периметру. Есть ли еще прямоугольные треугольники с той же особенностью?





4. Чтобы разрезать куб на 27 равных кубиков, надо выполнить 6 разрезов. Не удастся ли кому-нибудь уменьшить число разрезов, если позволить после каждого разреза перекладывать отдельные части куба?

5. Очень хороший мальчик очень прилежно потрудился возвести некоторое целое число k в 17-ю степень. В результате k^{17} оказалось двадцатитрехзначным числом. Теперь мальчик спрашивает вас: — Пятерка ли была последней цифрой числа k , возводимого в 17-ю степень?

6. Возможно ли многозначное квадратное число (т.е. вида n^2), сумма цифр которого составляет 2001 — число, обозначающее первый год 21-го столетия от Рождества Христова?

7. Прав ли очень хороший мальчик утверждая, что ему известно квадратное число, все цифры которого нечетные?

Если прав, то какое это число?

ЗАДАЧА РАЗМЕТЧИКА

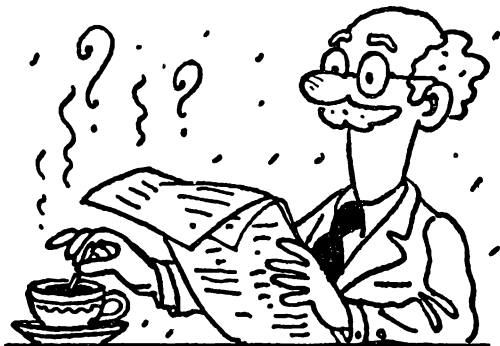
На некоторых предприятиях есть такая специальность: разметчик. Он намечает те линии и точки, по которым надо резать, пилить или сверлить заготовку. Разметчик — геометр.

Однажды ему пришлось наметить линии для разрезания квадратной пластинки из дорогого металла на 6 квадратных кусков, размеры которых безразличны. Обрезков не должно быть. Говоря геометрически — разрезать квадрат на 6 непересекающихся квадратов, если сторону квадрата можно делить только на целое число частей.

Разумеется, разметчик решил эту задачу. Какое будет ваше решение?

Более того, придуманный им способ разрезания оказался алгоритмом для разрезания квадрата (без обрезков) на любое целое число $k \geq 6$ непересекающихся квадратов при условии, что сторону квадрата придется делить только на целое число частей.

Докажите, что разметчик прав.



ЦИРКУЛЬ В ШУТКЕ И В ДЕЛЕ

... Балерина создавала
Точный круг в один момент,
Подивился ей немало
Достославный геометр.
О прекрасной балерине
Вспоминал частенько он —
Не по этой ли причине
Циркуль был изобретен?

Н. Глазков

1. Хитрый геометр берется начертить 4 окружности различной длины, сохраняя неизменным раствор циркуля.

Все честно и точно, но каким же образом? Разгадайте его догадку.

2. Пользуясь только циркулем, отметьте на белом листе бумаги 4 точки — вершины какого-нибудь воображаемого квадрата.

Раствор циркуля, по мере необходимости, можете изменять.

Подсказка. Вспомните, как вы циркулем намечаете вершины правильного шестиугольника, вписываемого в окружность.

С удовольствием разделю радость с тем из вас, кто найдет свой путь решения задачи — не по подсказке.



КУРЬЕЗНЫЕ МЕЛОЧИ

1. Произведение $2^5 \cdot 9^2$ отпечатали в типографии по ошибке как одно число 2592 и ... не ошиблись, так как $2^5 \cdot 9^2 = 2592$.

Аналогичные «опечатки» дают правильные результаты и во многих других случаях, например:

$$\begin{aligned} 3^4 \cdot 425 &= 34425 \\ 31^2 \cdot 325 &= 312325 \\ 2^5 \cdot \frac{25}{31} &= 25\frac{25}{31} \\ 2^6 \cdot \frac{26}{63} &= 26\frac{26}{63} \\ 100^2 \cdot \frac{334}{3333} &= 1002\frac{334}{3333} \\ 11^2 \cdot 9\frac{1}{3} &= 1129\frac{1}{3} \\ 29^2 \cdot 3\frac{10}{21} &= 2923\frac{10}{21} \\ 2^6 \cdot 412698\frac{26}{63} &= 26412698\frac{26}{63}. \end{aligned}$$

2. По-видимому, только в двух случаях число кратно обращенному:

$$9801 : 1089 = 9 \text{ и } 8712 : 2178 = 4.$$

И только в двух случаях число, обращенное квадратному также — квадратное:

а) $1089 = 33^2$, обращенное: $9801 = 99^2$;

б) $698896 = 836^2$ и оно же — палиндромическое, то есть равно обращенному.

3. После прибавления 1 к произведению любых четырех последовательных чисел образуется квадратное число, то есть

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = k^2 \text{ при любом } n \in N.$$

Например, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 5^2$, $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 11^2$, $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = 19^2$, и т.д.

4. Напишите какое-нибудь четырехзначное число, цифры которого последовательно уменьшаются на 1, и обращенное число, то есть записанное теми же цифрами в обратном порядке. Из большего вычтите меньшее. Я утверждаю, что в любом случае получится один и тот же результат.

Три примера:

$$\begin{array}{r} - 8765 \\ \underline{- 5678} \\ 3087 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 3210 \\ \underline{- 0123} \\ 3087 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 9876 \\ \underline{- 6789} \\ 3087 \end{array}$$

Сохраняется ли это свойство для чисел с двумя, тремя или пятью цифрами?

5. Если $n > 1$, то $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$ никогда не окажется квадратным числом. Но, забавно, что при трех значениях n из промежутка $[1; 1020]$ число $n! + 1$ становится квадратным.

Два я назову: $n = 4$ и $n = 5$; $4! + 1 = 5^2$ и $5! + 1 = 11^2$, а третье значение n найдите вы, зная, что $n! + 1 = 71^2$.

6. Если n^3 не делится на 7, то $n^3 - 1$ или $n^3 + 1$ непременно делится на 7. Например, $2^3 = 8$ не делится на 7, а $2^3 - 1$ делится на 7; $3^3 = 27$ не делится на 7, а $3^3 + 1$ делится на 7. Знающие формулу для $(a + b)^3$ легко докажут этот курьез, используя формулы чисел, не делящихся на 7: $n = 7k \pm 1$, $n = 7k \pm 2$ и $n = 7k \pm 3$, $k \in \mathbb{N}$.

7. Нет таких целых чисел, которые увеличивались бы ровно в 5 раз от перестановки первой цифры этого числа в конец его записи.

Докажите!



8. Забавно строение промежуточных результатов умножения чисел 230769 и 341 столбиком:

$$\begin{array}{r}
 \times 230769 \\
 \hline
 341 \\
 230769 \\
 923076 \\
 \hline
 692307 \\
 \hline
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

а) в первом промежуточном результате, естественно, — повторение цифр множимого; во втором справа-налево повторение цифр первого промежуточного результата, начиная с предпоследней, а последняя (9) становится первой; аналогично образуется и третий промежуточный результат;

б) в каждом столбце промежуточных результатов оказываются одинаковые цифры.

9. Еще завлекательнее такие курьезы:

а)

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{1 \cdot 1}{1} \\
 121 &= \frac{22 \cdot 22}{1 + 2 + 1} \\
 12321 &= \frac{333 \cdot 333}{1 + 2 + 3 + 2 + 1} \\
 1234321 &= \frac{4444 \cdot 4444}{1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1}
 \end{aligned}$$

Структура формирования из «холодных чисел» этих «жарких» равенств очевидна. Хотя бы из простого любопытства, проверьте кто-нибудь: возможно ли эту четырехэтажную «пирамиду» верных равенств достроить до предельной высоты, то есть до девятого этажа?

б)

$$\frac{14}{7} - \frac{7}{14} = \frac{147}{14 \cdot 7}.$$

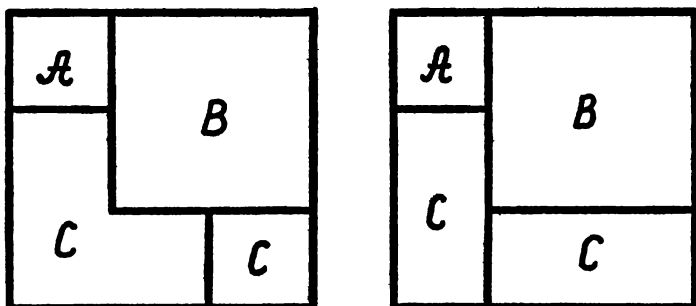
ТРИ СЕСТРЫ, КОВЕР И ПИСЬМО

Три сестры — мастерицы получили премию — большой синтетический ковер, $3 \text{ м} \times 3 \text{ м} = 9 \text{ м}^2$. Младшая сестра предложила:

— Давайте я отрежу себе уголок (*А*) в 1 м^2 , тогда вы из остального легко выкроите два равных квадратных коврика по любой из двух схем (см. рис.).

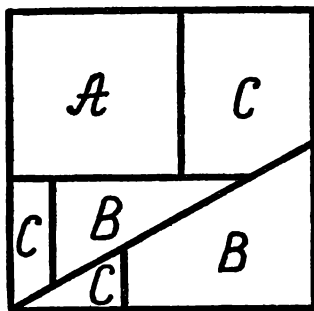
— Как видно один коврик (*В*) выкроится целиком, а другой будет склеен из двух частей (*С*).

Средняя и старшая сестры сочли несправедливым такое разделение и настояли на перекраивании подаренного ковра в три отдельных равных коврика. При этом сестрам хотелось сохранить квадратную форму ковриков.



— Я припоминаю, — заметила старшая сестра, — в книге «Удивительный квадрат» описан наиболее экономный способ перекраивания любого квадрата в три равных квадрата. Она воспроизвела чертеж раскроя (рис. на с. 251; часть *А* образует один квадрат; второй квадрат составляется из двух частей *В* и третий — из трех частей *С*). Так ковер и перекроили в три равных квадратных коврика.

* Б.А. Кордемский, Н.В. Русалев. Удивительный квадрат. Государственное издательство технико-теоретической литературы. М.—Л.: 1952; — 2 изд. АО «СТОЛЕТИЕ», М.: 1994.



Вскоре, после того как этот эпизод был описан в газете, сестры получили интригующее письмо от одного знатного разметчика:

— Дорогие мастерицы! И мне пришлось решать аналогичную задачу. Только у вас был ковер в 9 м^2 , а у меня лист линолеума также в 9 м^2 . Вам пришлось резать ковер на 6 частей, а я всего двумя разрезами раскроил линолеум на 4 куска, из которых составил 3 равных квадрата. При этом у меня, как и у вас, неиспользованных обрезков не было. В чем секрет моей удачи?

Как решил разметчик свою задачу?

ЗАКОЛДОВАННОЕ ЧИСЛО 128

Вы не верите в колдовство? Тогда потрудитесь найти доказательное объяснение такому феномену: с изрядной долей терпения вам удастся представить 100 в виде суммы последовательных натуральных чисел:

$100 = 18 + 19 + 20 + 21 + 22$, затем $101 = 50 + 51$, $102 = 33 + 34 + 35$, $103 = 51 + 52$, $104 = 2 + 3 + \dots + 13 + 14$ и вообще — каждое целое число, скажем, в промежутке $[100; 200]$, кроме одного, заколдованного — 128. И не пытайтесь — не выйдет!

Пытаясь «анатомировать» в указанном смысле натуральные числа подряд, вы споткнетесь на числах 2, 4, 8, ..., 2^n .

За что же выпала этим числам такая доля? Исследуйте!

ЗАКОЛДОВАННОСТЬ ИСЧЕЗАЕТ...

Как только внесем в условие предыдущей задачи маленький нюанс. Пусть слагаемыми будут только последовательные нечетные числа. Тогда любая натуральная степень любого натурального числа k , то есть k^n ($k > 1$, $n > 1$) становится представимой в виде суммы k последовательных нечетных чисел, из которых первое

$$a_1 = k^{n-1} - k + 1, \quad (1)$$

а последнее

$$a_k = k^{n-1} + k - 1. \quad (2)$$

Например, для числа $64 = 4^3$, $a_1 = 4^{3-1} - 4 + 1 = 13$,
 $a_k = 4^{3-1} + 4 - 1 = 19$ и $64 = 4^3 = \underbrace{13 + 15 + 17 + 19}_{k=4}$

$$128 = 2^7 = \underbrace{63 + 65}_{k=2}, \quad 243 = 3^5 = \underbrace{79 + 81 + 83}_{k=3}.$$

Примеры не доказывают справедливости формул (1) и (2).

Добейтесь исчезновения сомнений в безукоризненной правильности формул (1) и (2).

УНИКАЛЬНАЯ ТРОЙКА INTEGERS

Когда я прошу найти три последовательных натуральных числа таких, что сумма всех шести простых дробей, скомбинированных из этих чисел, равна целому числу (integer), то обычно начинают «пробу» с тройки (1, 2, 3) и ... угадывают!

$$\text{Действительно: } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{1} + \frac{2}{1} = 8.$$

Где же интрига, спросите вы? — Пожалуйста! Please! Докажите-ка, что об отыскании другой тройки чисел с теми же свойствами даже мечтать бесплодно!

ФОКУС ГЕОМЕТРИИ ДВИЖЕНИЯ

Начертите замкнутую кривую, пересекающую себя раз 10 — 12. Но кривая может пересечь себя в каждой точке не больше одного раза. Все точки пересечения обозначьте различными буквами (в любом порядке). Теперь поставьте карандаш на любую не узловую точку и двигайтесь вдоль кривой как бы повторяя ее построение. Проходя узловую точку, называйте вслух букву, которой точка обозначена.

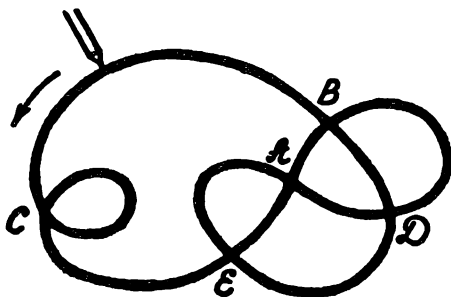
Обойти надо всю кривую и вернуться в исходный пункт. На каком-нибудь этапе движения назовите две последовательно проходимые буквы, но не в порядке их следования, а наоборот. Например, за буквой *B* следует буква *D*. Вы произносите вслух не *B, D*, а *D, B*.

Мне не сообщайте о такой перестановке последовательности двух букв, но запомните это место. Я его угадаю.

Фокус основан на топологической теореме «теории узлов». Угадывающему надо записывать называемые буквы на полоске бумаги поочередно сверху черты и снизу. Если перестановки букв не было, то каждая буква появится однажды сверху и однажды снизу черты. Если перестановка была, то одна буква появится дважды сверху и одна дважды снизу.

Вот в этих буквах и была перепутана их последовательность!

Пример (рис.).



Мне называют буквы:

C, C, E, A, B, D, E, A, D, B.

Я записываю:

C E B E D
~~*C A D A B*~~

Замечаю, что сверху черты два раза встречается *E*, а снизу — два раза *A*. Значит, перепутана последовательность узлов *E* и *A*. Правильный маршрут:

C, C, E, A, B, D, A, E, D, B.

«НЕОКОНЧЕННАЯ СИМФОНИЯ» ЧИСЛОВЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ (в десяти частях)

Часть первая — *Числовой хорал* — красивая закономерность:

$$3^2 = 11 - 2, \quad 33^2 = 1111 - 22, \quad 333^2 = 111111 - 222, \dots$$

В каждой разности двоек вдвое меньше, чем единиц.
 Вообще

$$\underbrace{(33 \dots 3)^2}_{\text{н троек}} = \underbrace{11 \dots 1}_{\text{2н единиц}} - \underbrace{22 \dots 2}_{\text{н двоек}}$$

Вместо аплодисментов дайте доказательство.

Часть вторая. — Все 10 цифр распределились в два уникальных ансамбля

$$A = 57321 \quad \text{и} \quad B = 60984$$

так очаровательно, что квадрат каждого в отдельности

$$A^2 = 3285697041 \quad \text{и} \quad B^2 = 3719048256$$

вобрал в себя все 10 цифр, каждую по одному разу.

Часть третья — *Квартет* трехзначных чисел, каждое звучит как сумма *третьих* степеней всех его цифр:

$$\begin{aligned} 153 &= 1^3 + 5^3 + 3^3, & 370 &= 3^3 + 7^3 + 0^3, \\ 371 &= 3^3 + 7^3 + 1^3, & 407 &= 4^3 + 0^3 + 7^3. \end{aligned}$$

Часть четвертая — *Трио* четырехзначных чисел, каждое звучит как сумма *четвертых* степеней всех его цифр:

$$\begin{aligned} 1634 &= 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4, \\ 8208 &= 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4, \\ 9474 &= 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4. \end{aligned}$$

Часть пятая — *Дует* пятизначных чисел, каждое звучит как сумма *пятых* степеней всех его цифр:

$$\begin{aligned} 54748 &= 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5, \\ 92727 &= 9^5 + 2^5 + 7^5 + 2^5 + 7^5. \end{aligned}$$

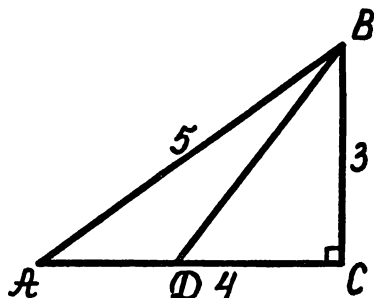
Части шестая — девятая — В стиле предыдущих трех частей. Приглашаю вас стать *композиторами* этих частей «числовой симфонии». В содружестве с компьютером, вам обеспечен творческий успех.

Часть десятая — *Соло* — десятизначное число равно сумме *десятых* степеней всех его цифр:

$$\begin{aligned} 4679307774 &= 4^{10} + 6^{10} + 7^{10} + 9^{10} + 3^{10} + 0^{10} + 7^{10} + \\ &\quad + 7^{10} + 7^{10} + 4^{10} — \end{aligned}$$

пока это — самое большое число в нашей «неоконченной симфонии»!





РОЖДЕНИЕ «АНТИЧНОГО КРАСАВЦА»

Треугольник, у которого стороны, три высоты и площадь — целые числа, назовем «античным красавцем». Один наш античный друг — египетский (справедливее — индийский) треугольник (3, 4, 5) — все-таки несовершенный «красавец» из-за одного пункта: его высота h , опущенная на гипотенузу, — не целое число.

Но в семействе прямоугольных треугольников и совершенных «античных красавцев» немало. А знакомы ли вы хотя бы с одним тупоугольным «античным красавцем»? Даю шанс для знакомства.

Тупоугольный «красавец» сам появится в вашей тетради сначала как осколок ABD египетского треугольника ABC (рис.), когда катет $AC = 4$ вы разделите в отношении 7 : 9, затем — в окончательном виде, когда треугольник ABD преобразуется в подобный ему с целочисленными сторонами.

Каковы размеры сторон, высот и площади родившегося таким образом «античного красавца»?

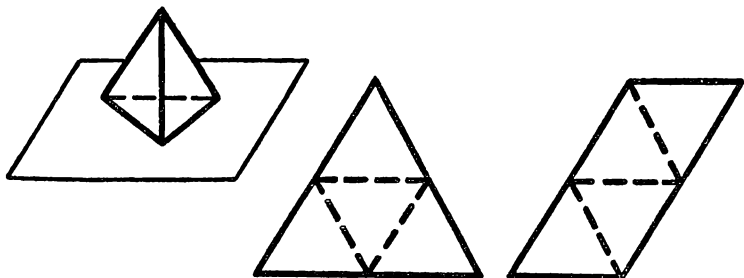
РАЗВЕРТКИ МОДЕЛЕЙ МНОГОГРАННИКОВ

Чтобы приготовить модель многогранника из куска плотной бумаги, надо прежде всего вычертить развертку требуемого многогранника. На рисунке изображена правильная пирамида (тетраэдр), все грани которой равносторонние треугольники, и две плоские развертки такой пирамиды. Сгибая каждую развертку по пунктирным линиям, можно построить модель пирамиды. (Сделайте!)

Сгибаемые части развертки образуют грани, а линии сгиба — ребра многогранника. Какие-либо другие формы разверток пирамиды, все грани которой равносторонние треугольники, невозможны.

Куб в этом смысле богаче: у него более десятка разверток различных форм. А сколько же все-таки точно? Исследуйте!

Начертите все развертки куба.



ТАЙНА РАЗВЕРТКИ ОКТАЭДРА

Но вот настал желанный миг:
Я тайну страшную постиг.

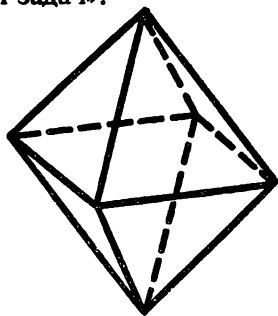
А.С. Пушкин

Все 8 граней октаэдра (рис. а) — правильного восьмигранника — равные правильные треугольники. Ребер у него 12. Я сделал 5 разрезов вдоль пяти каких-то выбранных ребер бумажной модели октаэдра. Образовалась его развертка (рис. б).

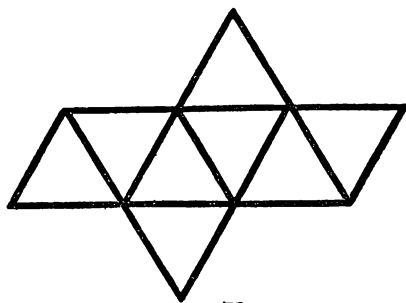
Ясно, что сгибая эту развертку вдоль сторон, соприкосновения треугольников, ее можно вновь «свернуть» в октаэдр. Но развертка октаэдра, как оказалось, таит в себе и неожиданное свойство. Из любой развертки куба или тетраэдра не свернешь никакого другого многогранника, кроме куба и тетраэдра. А вот нашу развертку октаэдра возможно «свернуть» и в иной восьмигранник — не октаэдр — такой как, если бы его «слепили» из трех конгруэнтных (равных) тетраэдров. Назовем его условно тритетраэдром. (Октаэдр же «слеплен» из двух четырехугольных пирамид.)

Начертите на плотной бумаге развертку октаэдра, вырежьте и формируйте: один раз — октаэдр (в каждой его вершине сходятся 4 ребра), другой раз — восьмигранник-тритетраэдр (в одной из его вершин сходятся 5 ребер).

В случае затруднений найдете подсказку в разделе «Решения задач».



а)



б)

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ГОЛОВОЛОМКА

Надеюсь, истинные рыцари красивойшей из наук — геометрии не откажут себе в удовольствии построить такой прямоугольный треугольник, в котором катеты и высота могли бы служить сторонами другого прямоугольного треугольника. Разумеется построение должно быть точным, следовательно, — обоснованным.

«ПИРАМИДА ПИФАГОРА»

Жаль, что древние египтяне, соорудившие величественную пирамиду Хеопса, не догадались возвести еще одну — правильную четырехугольную усеченную пирамиду (рис.) с произвольно выбранными размерами a и b сторон ее оснований и диагональю $d = a + b$.

(Киевлянин Ксюк О.Н. «откопал» ее в недрах континента «Геометрия».)

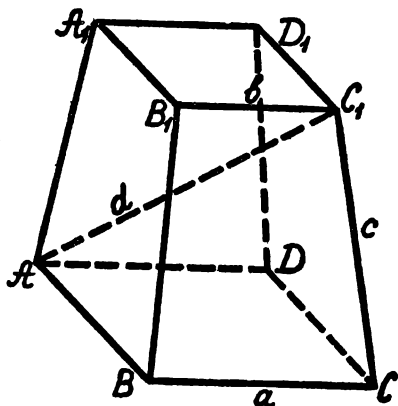
Такое сооружение заслуженно можно было бы назвать «пирамидой Пифагора», так как сумма площадей ее оснований $a^2 + b^2$ неизбежно равнялась бы квадрату длины (c) бокового ребра: $a^2 + b^2 = c^2$. Докажите!

При $a = 3$, $b = 4$ и $d = 3 + 4$ ребро пирамиды равнялось бы $c = 5$, и человечество получило бы пространственное воплощение в камне соотношений египетского (исторически правильное — индийского) треугольника.

Забавно, что «египетские» размеры «пирамиды Пифагора» (стороны оснований $a = 3$, $b = 4$ и ребро $c = 5$) являются решением диофантова уравнения

$$a^3 + b^3 + c^3 = (c + 1)^3.$$

Единственным ли?



И У ЧИСЕЛ БЫВАЮТ ПРИЧУДЫ

Однажды состоялась их встреча.

Первым явился точный квадрат: 2025. Он из тех, причуда которых — быть квадратом суммы своих же «кусочков»:

$$2025 = (20 + 25)^2.$$

Быть, кроме того, наряду с другими квадратными числами, но только имеющими вид $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, суммой кубов n порядковых чисел, начиная с 1. Так как $2025 = \left(\frac{9 \cdot 10}{2}\right)^2$, то

$$2025 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3.$$

Вторым пришел на встречу «полпред» семейства чисел вида $24k - 1$ с довольно забавной причудой, присущей им всем (то есть при каждом значении $k \in \mathbb{N}$):

если любое число этого семейства представить в виде произведения двух натуральных чисел, то их сумма непременно кратна числу 24.

Пример. Пусть $k = 19$, тогда $24 \cdot 19 - 1 = 455 \cdot 1 = 35 \cdot 13 = 91 \cdot 5 = 65 \cdot 7$ и каждая из сумм: $455 + 1 = 456$, $35 + 13 = 48$, $91 + 5 = 96$, $65 + 7 = 72$ — кратна числу 24.

Любое *простое* число вида $24k - 1$ — также не исключение. Например, $119 = 24 \cdot 5 - 1 = 119 \cdot 1$ и $119 + 1 = 120$ — кратно 24.

Аналогичная причуда есть еще только у одного семейства: $6k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Например, $6 \cdot 6 - 1 = 35 \cdot 1 = 7 \cdot 5$; $35 + 1 = 36$ и $7 + 5 = 12$ — кратны числу 6.

Опроверяющего примера нет, но мне неизвестно, владеет ли кто-нибудь доказательством безотказности этих причуд.

Третьим номером пожаловали сразу 9 четырехзначных чисел — стройных молодцев: 1111, 2222, ..., 8888, 9999. Никакое из этих девяти, кроме одного (*какого?*) не может обратиться в сумму квадратов ровно трех последовательных нечетных чисел (*каких?*, найдите их!).

Четвертый «оригинал» — скромное $127 = 7^3 - 6^3$, способное, при перестановке его цифр, обратиться в пять других трехзначных чисел, три из которых — с такой же причудой: каждое может быть представлено разностью кубов двух последовательных чисел. Какие это числа?

Пятым пришел на встречу с числами ваш возраст в компании с возрастами мамы, папы и других родственников еще не достигших 100 лет (все возрасты округлены до целого числа лет).

Регистрируясь, каждый возраст записал себя трижды (в виде шестизначного числа, например, 151515 или 323232 или, если 8 лет, то 080808). Основа их причуды в том, что, видите ли, в результате такого «удлинения», каждое из образовавшихся чисел становится кратным 7 и 13 и даже 111. Причуды обернулись закономерностью! Докажите в общем виде.

Большое смятение у собравшихся вызвала причуда числа 101010, явившегося последним; оно категорически отказывается, причем совершенно обоснованно, быть представленным в виде разности квадратов двух целых чисел, но внезапно тут же осуществляет требуемое представление подобно тому, как это делает любое простое число $p > 2$, например, $13 = 7^2 - 6^2$.

Найдите объяснение этой причуде числа-хамелеона: 101010...

Как же оно ухитрилось представить себя в виде разности квадратов двух чисел?

Еще каким натуральным числам можно гарантированно обещать их разложимость на разность квадратов двух целых чисел?

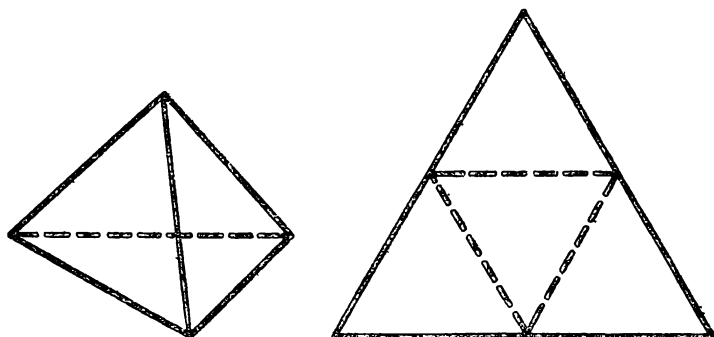
«БЕЗОБРАЗНУЮ» ПИРАМИДУ ИЗ ЧАСТЕЙ КВАДРАТА

Очень легко соорудить красивую пирамиду, например, тетраэдр — самый младший из пяти типов правильных многогранников. Аккуратно вырежьте из листа плотной бумаги предварительно нарисованный правильный треугольник и проведите пунктиром три средних линии (рис.).

Перегните треугольник по пунктирным линиям и соедините его вершины в одну точку. При этом половинки сторон треугольника попарно сомкнутся и пирамида с шестью равными ребрами и четырьмя равными гранями — готова.

Труднее, — следовательно, заманчивее — выстроить «безобразную» треугольную пирамиду — все ее 6 ребер имели бы неравные длины (в этом ее «безобразие»).

Строительный материал: квадратный кусок плотной бумаги, который требуется рассчитанно рассечь тремя прямолинейными разрезами на 4 треугольника. При формировании такой «безобразной» пирамиды из отрезанных частей квадрата допускается возможность предварительного переворачивания любой из этих частей.



ИНТЕРВЬЮ АСТРОНАВТА

Писатель, сочиняя фантастическую повесть, придумал такой эпизод.

Астронавт, путешествуя по вселенной, посетил и некую планету *Z*, мыслящие обитатели которой не имели таких рук, как у нас, а действовали щупальцами. Произошел такой разговор:

Астронавт: Я вижу около вас очень много детей. Все ваши?

Житель планеты *Z*: Нет, не все, но и моих здесь много. Сыновей у меня 51, а дочерей 20. Значит всего — 111 детей.

Поразмыслив, астронавт понял, что у жителей планеты *Z* сложилась система счисления по количеству щупальцев у каждого обитателя, подобно тому как 10 пальцев на руках наших землян послужили основой десятичной системы счисления. Сколько же детей у собеседника астронавта по нашему земному счету, и сколько щупальцев у каждого обитателя планеты *Z*?

СКАЗ О ПРЕВРАЩЕНИИ СТЕКЛЯШКИ В АЛМАЗ

Какие числа являются делителями вот такой «малютки»:

$$N = 1152921504606846975?$$

Алгоритм решения такой задачи известен: непосредственным делением на простые числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, и т.д. выявить числа, пригодные быть делителями *N*.

Хотя для нашей «малютки» это — процесс трудоемкий, утомительный, а потому и не сулит приятных эмоций, но алгоритм сам по себе вполне «прозрачен». Выходит, что предложенная задача — стекляшка, а не алмаз? Повременим с оценкой.

Придадим стекляшке дополнительную грань: из системы десятичной перебросим данное число в поместье двух

цифр — 0 и 1, в двоичную систему счисления. Оно в одно мгновение примет должный вид, когда «сверкнет догадки луч», что данное число лишь на 1 меньше числа 2^{60} , то есть что $N = 2^{60} - 1 = \underbrace{(11 \dots 11)}_{60 \text{ единиц}}_2$.

Вот эти единицы двоичной записи числа и превратили стекляшку в бриллиант.

Искомые делители — блестящие кусочки бриллианта:

$$(11)_2 = 3, (111)_2 = 7, (1111)_2 = 15, (11111)_2 = 31,$$

$$(111111)_2 = 63, (111111111)_2 = 1023,$$

$$\underbrace{(11 \dots 11)}_{12 \text{ единиц}}_2 = 4095, \underbrace{(11 \dots 11)}_{15 \text{ единиц}}_2 = 32767,$$

$$\underbrace{(11 \dots 11)}_{20 \text{ единиц}}_2 = 1048575, \underbrace{(11 \dots 11)}_{30 \text{ единиц}}_2 = 1073741823.$$

Немного размышлений, и образуется еще один набор решений:

$$(101)_2 = 5, (1001)_2 = 9, (10101)_2 = 21, (100001)_2 = 33 \text{ и т.д.}$$

Так 0 и 1 (хвала им!) облегчают работу мозга. Мудрые ЭВМ «сообразили» это сразу:

Как хороша двоичная система

И как проста в ней вычислительная схема,

Забавна записи канва: Один с нулем не 10 здесь, а 2.

В системе этой, как легко понять,

Сто плюс один не 101, а 5.

Задача 1. Число N , которое я разделил без остатка на 225 состояло из единиц и нулей. Увлеченный в последнее время решением разнообразных задач оптимизации, я произвел небольшое исследование и обнаружил, что для числа 225 это и есть самое меньшее делимое, состоящее только из единиц и нулей.

Найдите это число (N), а затем и частное $q = N : 225$. Какими забавными свойствами обладают цифры частного (q)?

Задача 2. (Для самостоятельного решения.)

Я утверждаю: ни одно число, состоящее только из единиц $(11\dots 11)$, не является квадратом, кубом или любой другой целой степенью числа в двоичной системе. Что предпочтете: опровержение или доказательство?

АРИФМЕТИКА — ТОЧИЛЬНЫЙ КАМЕНЬ СПОСОБНОСТЕЙ

Шесть раз безошибочно выполнялось сложение двух чисел, каждое из которых 177:

$$\begin{array}{r}
 +177 \\
 \underline{177} \\
 354
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 +177 \\
 \underline{177} \\
 365
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 +177 \\
 \underline{177} \\
 376
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 +177 \\
 \underline{177} \\
 332
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 +177 \\
 \underline{177} \\
 3132
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 +177 \\
 \underline{177} \\
 2451
 \end{array}$$

а результаты, как видите, различные.

Не потребуется много усилий, чтобы определить, что первые четыре результата получены в числовых системах с основаниями соответственно 10, 9, 8 и 12.

При попытке самостоятельного раскрытия «секрета» последних двух сложений, пожалуйста, не будьте слишком педантичными — ведь и шутка не противопоказана математической занимательности. А «секрет прост».

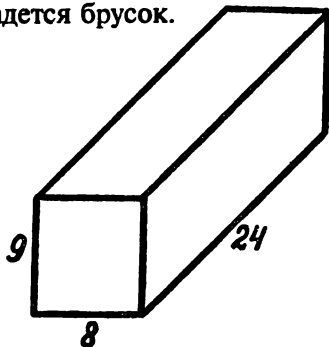
Разгадайте его.

КУБИК НЕ РУБИКА

Прежде всего в своем рабочем уголке выпилите и отшлифуйте (раскрасьте) деревянный брусок. Размеры указаны на рисунке.

Достаточно трех плоских разрезов, чтобы брусок распался на части. Вновь сложенные, но уже по иному, они, плотно сомкнувшись, должны образовать куб.

Чтобы не потерпеть неудачу, предварительно представьте на своем чертеже намечаемые линии разреза, сделайте рисунки частей, на которые распадется брусок.



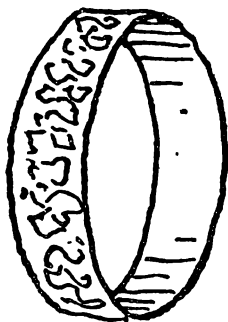
КАК ПРАГМАТИК, ИЛИ КАК МАТЕМАТИК?

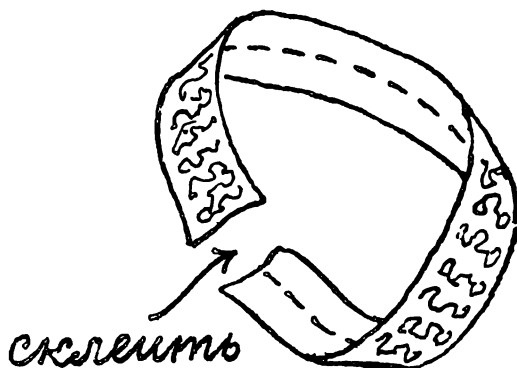
Будем считать, что кубик, который вы только что смас-терили, или любой другой из арсенала ваших игрушек, имеет размеры $1 \times 1 \times 1$.

Можно ли его полностью завернуть в квадратный платок размерами 3×3 ? Будете выяснять это как прагматик, то есть действительно пользуясь платком и кубиком, или как математик?

ЛИСТ МЕБИУСА И ПЕРЕПЛЕТЕНИЕ КОЛЕЦ (Тринадцать опытов с бумажной полоской)

Поверхность кольца, надеваемого на палец, имеет две стороны (рис.). Одной стороной кольцо соприкасается с пальцем, вторая сторона наружная. У этих сторон две границы (два края), каждая имеет форму окружности. Если какая-нибудь букашка захочет переползти с наружной стороны кольца на внутреннюю, то она при этом непременно должна пересечь ту или иную границу.





Легко приготовить простую модель поверхности совсем другого фасона — не двухсторонней, как поверхность кольца, а односторонней поверхности (см. рис.). Первым описал такую поверхность немецкий астроном Август Мебиус (в 1863 г.). Перекрутите на пол-оборота один конец прямоугольной бумажной полоски и приклейте его к другому концу той же полоски. Получится модель поверхности, у которой нет двух сторон — «внутренней» и «внешней».

Эту модель так и называют: «лист Мебиуса». Чтобы убедиться в том, что у поверхности листа Мебиуса только одна сторона, возьмите цветной карандаш и начните последовательно закрашивать лист, не отрывая карандаша от его поверхности и не пересекая края листа. Когда вернетесь к тому месту, с которого начали, вы увидите, что окажется окрашенной вся поверхность листа, хотя его край вы и не пересекали ни разу.

Возьмите теперь несколько листов бумаги поплотней (удобно воспользоваться обложками старых журналов большого размера), клей, ножницы и сделайте несколько практических упражнений с листом Мебиуса и другими моделями, изготовленными из прямоугольных полосок бумаги.

Опыт 1. Что получится, если обыкновенное (не перекрученное) бумажное колечко мы разрежем вдоль его средней линии? Очевидно — два колечка, причем длина окружности каждого будет такой же как длина окружности первоначально взятого колечка.

А вот, если лист Мебиуса мы так же разрежем вдоль его средней линии, то образуется...

Прodelайте и посмотрите, что получится.

Опыт 2. Приготовьте второй лист Мебиуса из достаточно широкой полоски и разрежьте его ножницами так, чтобы линия разреза все время шла вдвое ближе к левому краю полоски, чем к правому (линия разреза обойдет лист Мебиуса дважды). Вот теперь образуются 2 кольца, но они окажутся сцепленными. Прodelайте!

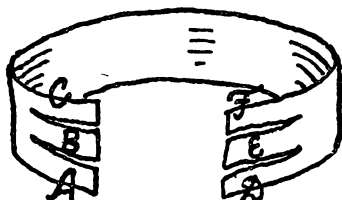
Тот же результат получится, если вновь взять бумажную полоску, один ее конец перекрутить на полный оборот (на 360°), приклеить к другому концу и разрезать получившуюся модель по средней линии.

Опыт 3. Надрезьте концы бумажной полоски, как показано на рис. внизу. Склейте концы *A* и *D*. Пропустите конец *C* над *B* и под *A*, а конец *F* над *D* и под *E*, после чего склейте концы *C* и *F*. Все склеивания концов производите прямо, то есть без предварительного перекручивания.

Теперь каждый начатый разрез продолжайте вдоль всей модели. Получится интересное переплетение трех колец: любые два будут сцеплены друг с другом и оба с третьим кольцом.

Если вы ошибетесь и конец *C* приклеите к концу *F*, не пропустив *C* между *B* и *A*, то после указанного разрезывания получится обычная цепь из трех колец.

Предложил Ellis Stangon в 1930 г.



Опыт 4. Еще раз приготовьте бумажную полоску с надрезами (рис. на с. 268). Поверните конец *E* направо (от себя) и склейте с концом *C*. Поверните конец *F* направо (от себя) и приклейте к концу *B*. Пропустите конец *A* под *B* и склейте его с концом *D* без перекручивания. Теперь продолжайте один и второй разрезы вдоль всей модели — получится не 3 сцепленных кольца, а только 2: одно маленькое и одно большее.

Опыт 5. Любопытно решение более сложной задачи: подготовить из бумажной полоски такую модель, из которой можно было бы получить переплетение (в частности, обычную цепь) *n* колец при помощи лишь одного сквозного разрезания. (Maxey Brooke and Joseph Madachy)

Секрет решения заключен в предварительном сгибании полоски по ее длине еще до разрезания и в способе склеивания надрезанных концов согнутой полоски.

Начните с полоски, перегнутой по длине один раз (рис. внизу). Перекрутите ее на полный оборот (360°) и склейте концы, накладывая «домиком» один конец на другой. Теперь разрежьте двойной слой склеенной ленты по ее средней линии — получатся три кольца, сцепленные попарно (как в опыте 3).



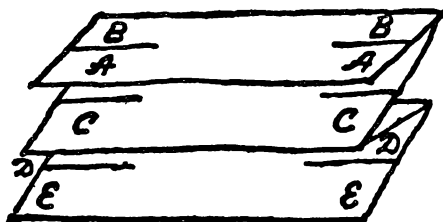


Опыт 6. Согните бумажную полоску по ее длине и сделайте надрезы вдоль средней линии (рис. вверху). Не перекручивая, сверните в кольцо полоску *СС* и склейте ее концы. Левый конец полоски *АА* пропустите снизу вверх сквозь кольцо *СС* и, не перекручивая полоски, склейте с ее правым концом.

Аналогично склейте концы полоски *ВВ*, предварительно протавив один ее конец сквозь кольцо *АА*.

Продолжайте разрез вдоль всей модели по двойному слою. Если сделано все точно, как указано, то получится цепь в 3 кольца. В случае, если допустите некоторое отклонение от инструкции, могут получиться три разрозненных кольца.

Опыт 7. Чтобы получить цепь из 5 колец с помощью всего лишь одного сквозного разреза, возьмите достаточно широкую полоску бумаги и согните ее «гармошкой» (рис. внизу). Надрежьте концы, как показано на этом рисунке, придайте согнутой полоске форму кольца и скле-



ивайте такие концы: C и C , D и D , E и E — прямо, как они соединялись бы при смыкании концов полоски для образования простого кольца; B и B , предварительно протаскив один из этих концов под кольцами CC и DD ; A и A , предварительно протаскив один из этих концов под кольцами CC и EE .

Теперь продолжайте разрез вдоль модели по всем складкам — получится цепь из 5 колец. Если работа будет выполнена с некоторым отличием от инструкции (по ошибке или преднамеренно), то — либо все равно получится 5 колец, как-нибудь переплетенных, либо модель распадется на части, состоящие из сцепленных или не сцепленных колец.

К следующим шести опытам указаний не будет.

Придется самостоятельно искать пути решения. Ставим такое условие: добиться результатов с помощью одного сквозного разреза модели, сконструированной из бумажной полоски, некоторым образом согнутой, надрезанной, и концы которой склеены.

Опыт 8. Цепь в 4 кольца.

Опыт 9. Две отдельные цепи в 2 и 3 кольца каждая.

Опыт 10. Цепь в 3 кольца с четвертым кольцом, зацепившимся за среднее кольцо.

Опыт 11. Цепь в 9 колец.

Опыт 12. Три отдельных куска цепи по 3 кольца в каждом куске (из одной бумажной полоски).

Опыт 13. Отдельный кусок цепи в 4 кольца и второй отдельный кусок цепи в 5 колец (из одной бумажной полоски).



РЕШЕНИЯ

«...Я СКРЫВАТЬ НЕ СТАНУ...»

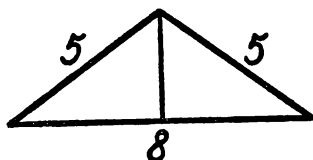
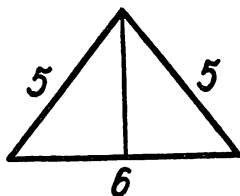
1. Например, 13 и 31.
2. Рассмотрим выражение $(10n + 5)^2 = 100n^2 + 100n + 25 = 100n(n + 1) + 25$. Первое слагаемое оканчивается двумя нулями, поэтому третья цифра от конца определяется последней цифрой произведения $n(n + 1)$, а ею может быть только 2 или 6 или 0 ($1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 4 = 12$, $4 \cdot 5 = 20$ и т.д.).
3. а) $30^3 = 27000$; б) $11^3 = 1331$.

ЛЮБОВЬ С ПЕРВОГО ВЗГЛЯДА

1. Ни одного. У точного квадрата не может быть последней цифрой 2, 3, 7 или 8. Цифра 5 — может, но тогда предпоследней должна быть цифра 2, а не 3, как в примере. В самом деле, в этом случае последняя цифра числа, возводимого в квадрат, также 5, то есть оно имеет вид $10a + 5$ (a — число десятков). Тогда

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 10a + 25.$$

Сумма первых двух слагаемых оканчивается двумя нулями, откуда и следует, что предпоследняя цифра числа $(10a + 5)^2$ — всегда 2.

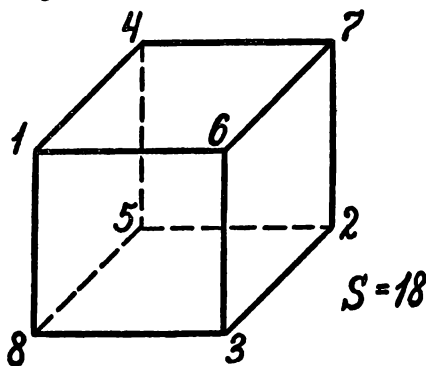


2. Какую цифру ни приписывай, квадратного числа не образуется. Действительно, так как $(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25$, то третья цифра от конца записи этого числа определяется последней цифрой произведения $a(a + 1)$ — двух последовательных натуральных чисел; ею всегда является четная цифра, но только не 4 и не 8 ($1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 4 = 12$, $4 \cdot 5 = 20$, $5 \cdot 6 = 30$, $6 \cdot 7 = 42$, $7 \cdot 8 = 56$, $8 \cdot 9 = 72$ и т.д.), следовательно, никакое число с окончанием 425 или 825 не является квадратным.

3. С одного взгляда на рисунок вверху становится ясным, что каждый из данных треугольников состоит из пары «египетских» треугольников: (3, 4, 5), следовательно, заданные треугольники равновелики.

КУБИК ИЗГОТОВЛЕН

Вершины занумерованы, например, как на рисунке внизу. Каждая вершина кубика принадлежит трем граням, поэтому сумму $1 + 2 + \dots + 8$ следует умножить на 3, затем разделить на 6 (на число граней), получится 18 — сумма номеров на каждой грани.



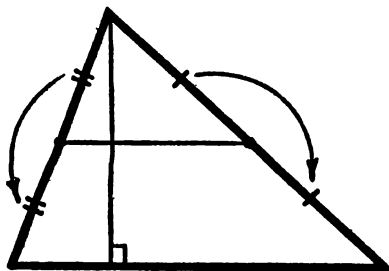
ИСПОЛИН И ПИГМЕЙ

Искомый двузначный множитель 83. В самом деле, $41096 \times 83 = 3410968$, то есть цифры множимого повторились в произведении, цифра единиц множителя возглавила произведение, а цифра десятков множителя встала в хвост произведения.

ПРЕВРАЩЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА В ПРЯМОУГОЛЬНИК

Решение на рисунке. Один разрез по высоте, второй — по средней линии треугольника.

В результате перемещения, указанного стрелками, образуется прямоугольник. Доказать, что — прямоугольник, легко.



ВСЕ МОГУТ ... 10 ЦИФР

1. Например, $78\frac{3}{6} + 21\frac{45}{90} = 100$ или $50\frac{1}{2} + 49\frac{38}{76} = 100$.

2. $4728350169 = 68763^2$, $7042398561 = 83919^2$.

3. Сумма всех цифр от 0 до 9 равна 45 при любом способе сложения, следовательно, делится на 9. Китаец складывал (в уме) названные цифры результата сложения. Если сумма делилась на 9, то угаданная цифра — 0, если — не делилась, то угаданная цифра — дополнение до ближайшего числа, кратного девяти.

Например, мальчик, называя цифры результата, утаил цифру 3. Складываем названные: $6 + 4 + 1 + 4 = 15$. Ближайшее кратное девяти — 18; $18 - 15 = 3$.

4. $4938271605 \cdot 2 = 9876543210$ — получилось самое большое десятизначное число из возможных с неповторяющимися цифрами.

5. Заметим, что n^2 и n^3 в совокупности порождают 10 цифр только для $47 \leq n \leq 99$. При $n = 46$ имеем: $46^2 = 2116$ и $46^3 = 97336$ — только 9 цифр. Исключим из рассмотрения числа n с последней цифрой 0, 1, 5, 6, так как n^2 и n^3 в этих случаях имеют одинаковые окончания. Далее: так как сумма всех цифр равна 45, то есть делится на 9 и $n^2 + n^3 = n^2(n + 1)$, то либо n^2 , либо $n + 1$ кратны 9. Следовательно, нет нужды проверять пригодность числа n не кратного 3 (тогда n^2 не кратно 9), и числа, отличающегося более, чем на 1 от ближайшего значения n , кратного 9 (тогда $n + 1$ не кратно 9).

В результате, испытанию на калькуляторе достаточно подвергнуть лишь 15 чисел: 48 (кратно 3), 53 (на 1 меньше ближайшего кратного 9), 54 (кратно 3), 57, 62, 63, 69, 72, 78, 84, 87, 89, 93, 98 и 99. Из них удовлетворяет условию только 69. Действительно, $69^2 = 4761$ и $69^3 = 328509$ порождают в совокупности все 10 цифр.

ОБОЙДЕМСЯ БЕЗ НУЛЯ

1. 219438657.

3. Например, так:

$$\begin{array}{lll} \frac{17496}{5832} = 3, & \frac{17568}{4392} = 4, & \frac{17658}{2943} = 6, \\ \frac{16758}{2394} = 7, & \frac{25496}{3187} = 8, & \frac{57429}{6381} = 9. \end{array}$$

Возможны и другие дроби, формирующие те же числа.

4. $-1 + 23 + 45 + 67 - 89 = 45$;

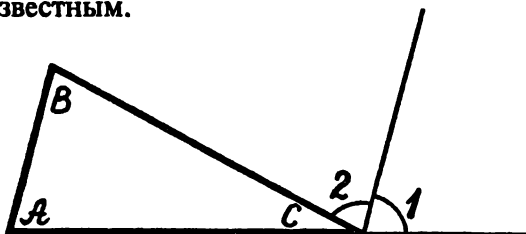
$98 - 76 + 54 - 32 + 1 = 45$.

5. $12 \cdot 483 = 5796$; $42 \cdot 138 = 5796$; $18 \cdot 297 = 5346$;
 $27 \cdot 198 = 5346$; $48 \cdot 159 = 7632$; $28 \cdot 157 = 4396$;
 $4 \cdot 1963 = 7852$.

7. Девятизначное число, все цифры которого одинаковы.

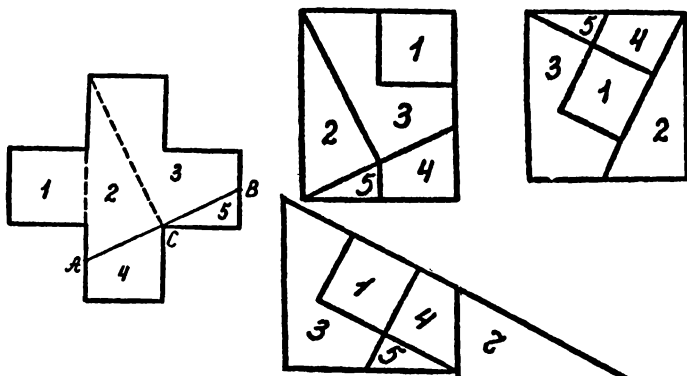
ДВЕ ВЕСЕЛЫЕ ТЕОРЕМЫ

По условию (рис.) $\angle 1 = \angle 2$. Далее: $\angle 1 + \angle 2 = \angle A + \angle B$ (Почему?) и $\angle 1 = \angle A$ (Почему?). Откуда: $\angle 2 = \angle B$ и $\angle A = \angle B$, следовательно $n = m$ (Почему?). Ровесники: Мямлик и Юлечка. Шустрик младше их или старше — остается неизвестным.



ГОЛОВОЛОМКА НА ТЕМУ ПЕРЕСТРОЙКИ

Решение на рисунках внизу. Искомый разрез: AB , где A и B — середины сторон квадратиков; третья точка пересечения с контуром: C — одна из вершин «креста».



РАЗЫСКИВАЮТСЯ ПОТЕРЯВШИЕСЯ ЧИСЛА

1. 212248 и 303369. 2. 3689, 369, 368.

Пусть большее число — четырехзначное: $1000x + 100y + 10z + t$ (x, y, z, t — цифры). Второе число: $100x + 10y + t$, третье $100x + 10y + z$. Их сумма: $1200x + 120y + 11z + 2t = 4426$; $4426 - 1200x$ — должно быть не более чем четырехзначным, следовательно, $x = 3$. Теперь $120y + 11z + 2t = 4426 - 3600 = 826$. Наибольшее подходящее значение $y = 6$. Теперь $11z + 2t = 826 - 720 = 106$; $11z$ должно быть четным, поэтому положим $z = 8$, тогда $2t = 106 - 88 = 18$, $t = 9$. Розыск закончен. Числа: 3689, 369, 368.

Проверяем: $3689 + 369 + 368 = 4426$.

3. Последней цифрой квадратного числа может быть только 0, 1, 4, 5, 6, 9. Методом «проб и ошибок» (иногда говорят: методом «тыка») или по таблице квадратов устанавливаем, что не существует квадратных чисел вида $aa00$, $aa11$, $aa55$, $aa66$ и $aa99$, но есть $7744 (= 88^2)$ — первое из разыскиваемых.

Второе: 4225. В самом деле: последней цифрой, $s + 1$, может быть 4, 5, 6 или 9; откуда $s = 3, 4, 5$ или 8. Следовательно, определились 4 «подозреваемых» числа и только одно из них — разыскиваемое: 4225.

Третье и четвертое: $1089 (= 33^2)$ и обращенное ему $9801 (= 99^2)$.

Для их розыска опирались на легко доказываемое свойство: сумма любой пары взаимно обращенных четырехзначных чисел непременно делится на 11, а если еще они и квадратные, то каждое из них, следовательно, делится на 11^2 , то есть искать их надо среди чисел $33^2, 44^2, \dots, 99^2$.

Разыскиваемыми оказались: $33^2 = 1089$ и обращенное $9881 = 99^2$.

4. Допустим, что $(2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 = (2k)^2 + (2k + 2)^2$, $n, k \in \mathbb{N}$. После преобразований:

$$4n^2 = 4k^2 + 4k + 1 -$$

четное число (слева) равно нечетному (справа) — противоречие.

ОНО РАСТЕТ, ОСТАВАЯСЬ КВАДРАТНЫМ

$$a = 6, b = 5, c = 7, k = 2.$$

НЕУЖЕЛИ?

Пусть одна искомая дробь $\frac{a}{b}$, а другая $\frac{c}{d}$. Обозначим буквой k отношение второй дроби к первой. Тогда $\frac{c}{d} = k\frac{a}{b}$. По условию $\frac{a^2}{b^2} + \frac{k^2 a^2}{b^2} = \frac{a^3}{b^3} + \frac{k^3 a^3}{b^3}$, или $\frac{a^2}{b^2} (1 + k^2) = \frac{a^3}{b^3} (1 + k^3)$, или $1 + k^2 = \frac{a}{b} (1 + k^3)$, откуда $\frac{a}{b} = \frac{1 + k^2}{1 + k^3}$.

Придавая k различные числовые значения, можно получить любое количество искомых дробей. Например, при $k = 2$ получаем $\frac{a}{b} = \frac{5}{9}$; при $k = 3$ получаем $\frac{a}{b} = \frac{1+9}{1+27} = \frac{5}{14}$ и т.д. (см. равенства (1) и (2) на с. 243).

СЕМЬ БЕД — ОДИН ОТВЕТ

Это просто озорной заголовок для объединения семи задач, результатом решения которых является один ответ на все вопросы: «НЕТ».

1. Ответ: нет. При любом значении k заданная сумма $S = \frac{(k+1)k}{2}$. Предположим, что число S оканчивается на 4 или на 9. В таком случае произведение $(k+1)k$ оканчивается цифрой 8, но в действительности, как легко убедиться, последней цифрой произведения $(k+1)k$ может быть только 0, или 2, или 6.

2. Ответ: нет. Квадрат любого натурального числа, $(2n)^2$ или $(2n+1)^2$, при делении на 4 дает в остатке 0 или 1. Но остаток от деления любого числа N на 4, согласно признаку делимости, определяется остатком от деления на 4 числа, образованного двумя последними цифрами делимого N .

Для чисел 11, 55, 66, 99 он отличен от 0 и 1, а именно: либо 3, либо 2. Поэтому на все 4 вопроса задачи ответ один: нет, не существуют.

3. Ответ: нет. Пусть x, y, z — соответственно — катеты и гипотенуза. Тогда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 & \text{— по теореме Пифагора,} \\ \frac{xy}{2} = x + y + z & \text{— по условию.} \end{cases}$$

Требуется найти натуральные значения x, y, z удовлетворяющие образовавшейся системе уравнений. Исключая z , получим после упрощения, $xy = 4(x + y - 2)$. По крайней мере одно из переменных — x или y , кратно 4. Пусть $y = 4n$, $n = 1, 2, \dots$ Тогда $nx = 4n - 2$, откуда $x = \frac{2(2n-1)}{n-1}$. Так как $2n - 1$ — нечетное, то x целое только в двух случаях: при $n = 2$, тогда $x = 6, y = 8$, и при $n = 3$, тогда $x = 5, y = 12$, и, как говорится, третьего не дано.

4. Ответ: нет. Дело в том, что каждый кубик имеет 6 граней, значит, как ни перекладывая части данного куба, — одним разрезом не получишь более одной грани кубика.

5. Ответ: нет. Прикинем: по условию, k^{17} содержит 23 знака, а 10^{17} — 18 знаков, следовательно, $k > 10$. Возьмем $k = 15$ и $k = 25$; $15^{17} = (15^4)^4 \cdot 15 = 50625^4 \cdot 15$ — не более чем $4 \cdot 5 + 2 = 22$ знака, следовательно, $k > 15$, $25^{17} = 625^8 \cdot 25$ — не меньше чем $3 \cdot 8 + 2 = 26$ знаков, следовательно, $k < 25$, т.е. $15 < k < 25$. Но в этом промежутке нет чисел с последней цифрой 5.

6. Ответ: нет. Сумму цифр любого натурального числа N , доведенную до однозначного числа, назовем «корнем числа N ». Например, 6 — «корень числа 1995», так как $1 + 9 + 9 + 5 = 24, 2 + 4 = 6$.

Используем такое свойство «корня числа N »: если N равно сумме или произведению натуральных чисел A и B , то в такой же зависимости находятся соответствующие «корни чисел N, A и B ».

В частности, корень любого точного квадрата совпадает с корнем квадрата какого-либо из однозначных: 1, 4, 9, 16,

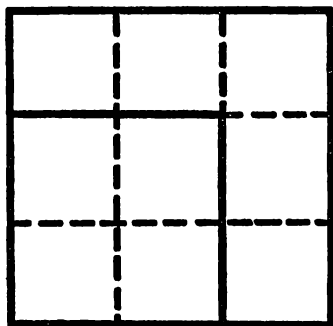
25, 36, 49, 64 или 81. Корни этих чисел не очень разнообразны: только 1, 4, 7, и 9. Значит, если корень испытываемого числа N не равен 1, 4, 7 или 9, то N не является точным квадратом. (Условие необходимое, но не достаточное.) По условию задачи, сумма цифр испытываемого числа N равна 2001, значит, «корень числа N » равен $2 + 0 + 0 + 1 = 3$, то есть не удовлетворяет необходимому условию принадлежности испытываемого числа к классу точных квадратов.

Предупреждение. Предложенный способ получения ответа на вопрос: «Является ли точным квадратом заданное число N ?», конечно, очень элегантен, но... не попадитесь в ловушку по невнимательности. У этого способа безукоризнен только ответ «нет». Сказать «да» он не уполномочен сформулированным свойством. (Сообразите — почему?) Например, 2403 явно не квадратное число (последняя цифра 3), однако его «корень» равен 9, то есть совпадает с корнем квадрата однозначного числа.

7. Ответ: не прав. Последней цифрой нечетного квадратного числа может быть только 1, 5 или 9. Но в каждом из таких чисел предпоследняя цифра (цифра десятков) четная, что сразу следует из рассмотрения квадратов нечетных чисел вида $10a \pm 1$, $10a \pm 3$ и $10a \pm 5$.

ЗАДАЧА РАЗМЕТЧИКА

На рисунке показано разделение квадрата 3×3 на 6 непересекающихся квадратов. Очевидно, что любой квадрат

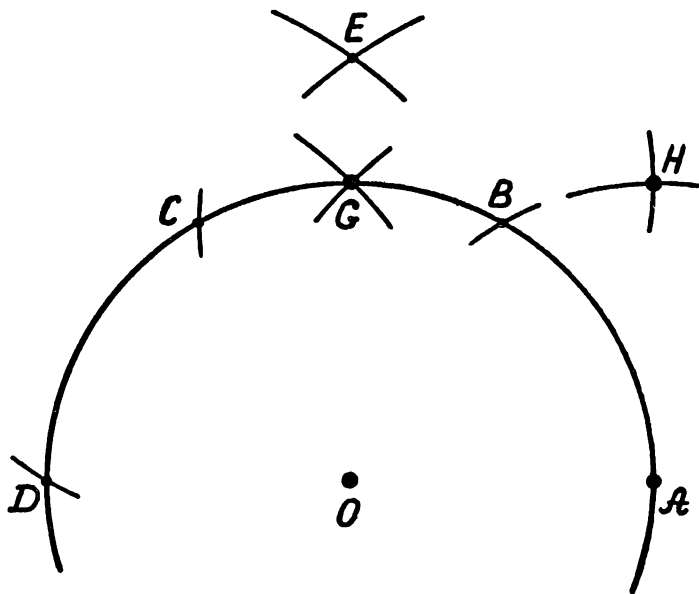


$n \times n$ ($n \geq 2$) аналогично может быть разделен на $k = 2n$ непересекающихся квадратов. Разделяя теперь любой из получившихся квадратов на 4 непересекающихся квадрата (пунктир на рисунке), получим $k = 2 \cdot n + 3$ квадратов. Следовательно, получилось конструктивное доказательство возможности разрезать квадрат $n \times n$ на любое число $k \geq 6$ квадратов.

ЦИРКУЛЬ В ШУТКЕ И В ДЕЛЕ

1. Вычерчивается окружность 1) на плоскости, 2) на шаре, 3) на конусе (центр — в вершине конуса), 4) положив на бумагу шашку и утвердив на ней ножку циркуля.

2. Раздвинем ножки циркуля на произвольное расстояние (условно будем считать его равным a). Утвердив ножку циркуля в какой либо точке O , строим установленным раствором циркуля дугу, не меньшую, на глаз, полуокружности (рис.). Ставим ножку циркуля в произвольную точку A построенной дуги и тем же раствором циркуля делаем засечки B, C, D так, что $AB = BC = CD (= a)$.



Отмеченные точки A, B, C, D — вершины углов правильного, вписанного в окружность, шестиугольника. Далее, радиусом AC , равным стороне правильного вписанного треугольника ($a\sqrt{3}$) из A и D описываем дуги и отмечаем точку E их пересечения. Если теперь радиусом OE опишем из тех же точек A и D дуги, то они пересекутся на дуге $ABCD$ в точке G (так как $OE = \sqrt{AE^2 - a^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$, то есть OE — сторона квадрата, вписанного в окружность радиуса a). Таким образом, определились три вершины углов квадрата: A, O и G . Найти четвертую искомую точку H легко: стоит лишь из A и G провести дуги радиусом $OA = a$.

КУРЬЕЗНЫЕ МЕЛОЧИ

4. Да.

5. $71^2 - 1 = 5040 = 7!$. Следовательно, $n = 7$.

6. Если $n = 7k \pm 1$, то

$$(7k \pm 1)^3 \mp 1 = 7^3 k^3 \pm 7^2 \cdot 3k^2 + 7 \cdot 3k - \text{кратно } 7.$$

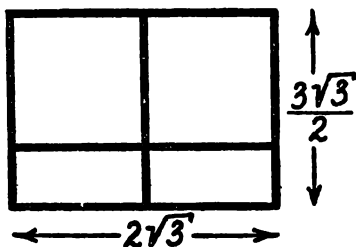
Если $n = 7k \pm 2$, то

$$(7k \pm 2)^3 \mp 1 = 7^3 k^3 \pm 7^2 \cdot 6k^2 + 12 \cdot 7k \pm 7 - \text{кратно } 7.$$

Если $n = 7k \pm 3$, то

$$(7k \pm 3)^3 \pm 1 = 7^3 k^3 \pm 7^2 \cdot 3k^2 + 7 \cdot 27k \pm 28 - \text{кратно } 7.$$

7. Предположим, искомое число увеличилось в 5 раз от перенесения первой его цифры в конец записи числа. При этом количество цифр остается в записи числа неизменным. Но это означает, что первая цифра, становящаяся последней после ее перенесения, есть 1. А число, оканчивающееся единицей, не может оказаться результатом умножения искомого числа на 5.



ТРИ СЕСТРЫ, КОВЕР И ПИСЬМО

В письме разметчика содержалась хитринка. Площадь листа линолеума такая же, как площадь ковра: 9 м^2 , но ковер квадратный, а о форме листа линолеума разметчик умолчал.

По-видимому, это был прямоугольный лист длиной $2\sqrt{3}$ м и шириной $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ м (см. рис.). Один разрез делит сторону пополам, другой — в отношении 1 : 2.

ЗАКОЛДОВАННОЕ ЧИСЛО 128

Сумму n последовательных натуральных чисел $k + (k + 1) + (k + 2) + \dots + (k + n - 1)$ вычисляем по формуле

$$S_n = \frac{k + (k + n - 1)}{2} n = \frac{(2k - 1) + n}{2} n$$

(сумма n членов арифметической прогрессии).

Замечаем, что $2k - 1$ — нечетное число при любом натуральном значении k , но n может быть четным или нечетным. Пусть n — четное, тогда сумма нечетного и четного чисел, $2k - 1 + n$ — число нечетное. Если n — нечетное, то и в этом случае $2k - 1 + n$ — число нечетное. Следовательно, в разложении S_n на множители есть хотя бы один нечетный сомножитель. Но $128 = 2^7$, равно как и любое число вида 2^n , не имеет в своем разложении одного нечетного множителя, отличного от единицы.

ЗАКОЛДОВАННОСТЬ ИСЧЕЗАЕТ...

Если в последовательности нечетных чисел a_1 — первое число, то

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2, & a_3 &= a_1 + 2 \cdot 2, \\ a_4 &= a_1 + 3 \cdot 2, \dots, & a_k &= a_1 + (k - 1) \cdot 2. \end{aligned}$$

Если $a_1 = k^{n-1} - k + 1$, то

$$a_k = k^{n-1} - k + 1 + 2 \cdot (k - 1) = k^{n-1} + k - 1,$$

откуда следует, что формула (2) верна (см. с. 252). Сумму k членов этой последовательности вычисляем по формуле для суммы k членов арифметической прогрессии:

$S_k = \frac{a_1 + a_k}{2} k$. Имеем:

$$S_k = \frac{(k^{n-1} - k + 1) + (k^{n-1} + k - 1)}{2} k = \frac{2k^{n-1} \cdot k}{2} = k^n.$$

Утверждение, высказанное в условии задачи, подтвердилось.

УНИКАЛЬНАЯ ТРОЙКА INTEGERS

Искомая тройка чисел имеет вид: $n - 1, n, n + 1$. Убедитесь, что сумма шести скомбинированных из этих чисел дробей равна $\frac{6n^2}{n^2 - 1}$ и должна быть целым числом. Но n^2 и $n^2 - 1$ не имеют общих делителей, следовательно, число 6 должно делиться на $n^2 - 1$, а это возможно только при $n = 2$. Тогда $n - 1 = 1$, $n + 1 = 3$, и уникальность тройки (1, 2, 3) доказана!

«НЕОКОНЧЕННАЯ СИМФОНИЯ» ЧИСЛОВЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Часть первая. Преобразование левой части равенства в правую покажем сначала на частном примере:

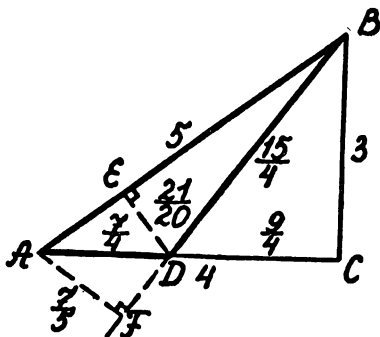
$$\begin{aligned} 333^2 &= 111^2 \cdot (10 - 1) = 111 \cdot (1110 - 111) = \\ &= 111 \cdot (1110 - 110 - 1) = 111 \cdot (1000 - 1) = \\ &= 111000 - 111 = 111000 + 111 - 2 \cdot 111 = 111111 - 222. \end{aligned}$$

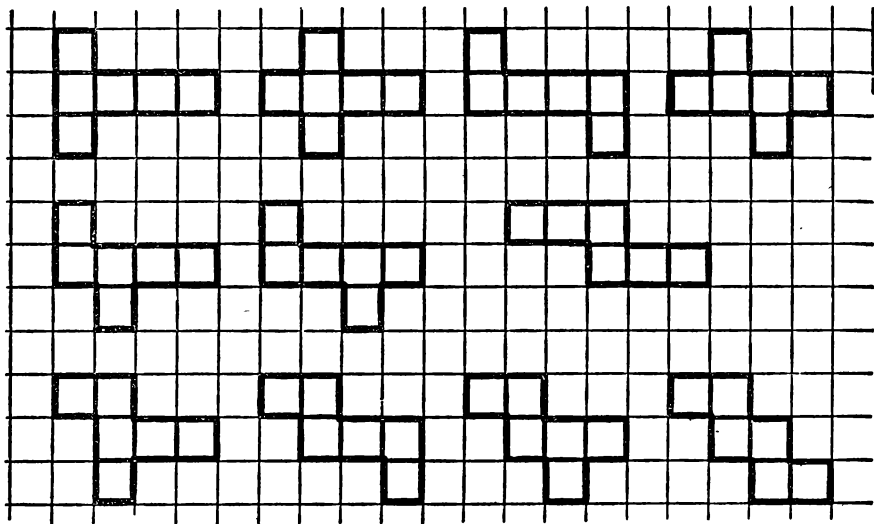
Аналогично в общем виде:

$$\begin{aligned} (\underbrace{33 \dots 3}_n)^2 &= (\underbrace{11 \dots 1}_n)^2 \cdot (10 - 1) = \\ &= \underbrace{11 \dots 1}_n \cdot \underbrace{(11 \dots 10 - 11 \dots 1)}_n = \\ &= \underbrace{11 \dots 1}_n \cdot \underbrace{(11 \dots 10 - 11 \dots 10 - 1)}_{n-1} = \\ &= \underbrace{11 \dots 1}_n \cdot \underbrace{(100 \dots 0 - 1)}_{n \text{ нулей}} = \underbrace{11 \dots 100 \dots 0}_n \underbrace{100 \dots 0}_n \underbrace{- 11 \dots 1}_n = \\ &= \underbrace{11 \dots 100 \dots 0}_n \underbrace{+ 11 \dots 1}_n - 2 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_n = \underbrace{11 \dots 11}_{2n} - \underbrace{22 \dots 2}_{2n} \end{aligned}$$

РОЖДЕНИЕ «АНТИЧНОГО КРАСАВЦА»

Имеем: $AD = \frac{7}{4}$, $DC = \frac{9}{4}$, $AB = 5$, $BC = 3$ (рис.). Тогда $BD = \frac{15}{4}$. Высоты треугольника ABD : $DE = \frac{21}{20}$, $AF = \frac{7}{5}$, $BC = 3$. Искомые размеры «античного красавца»: стороны — 35, 75 и 100, высоты — 21, 28 и 60, площадь — 1050.

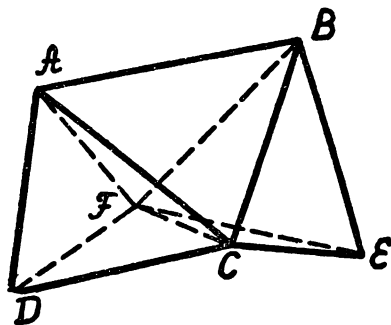




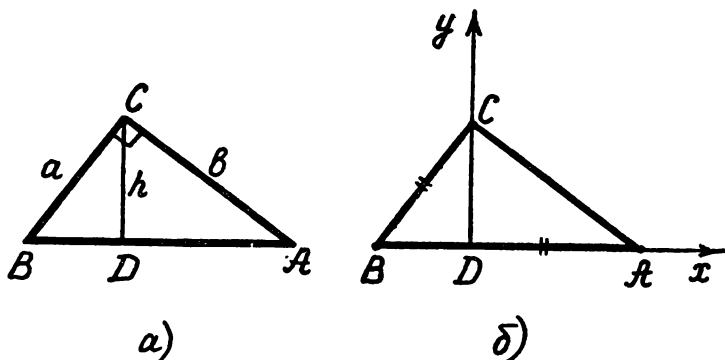
РАЗВЕРТКИ МОДЕЛЕЙ МНОГОГРАННИКОВ

Куб имеет 11 разверток различных форм (рис.). Из них в шести формах четыре грани куба развертываются в одну полосу, в четырех формах — не более трех граней в полоске, в одной — не более двух граней в полоске.

ТАЙНА РАЗВЕРТКИ ОКТАЭДРА



На рисунке — искомый восьмигранник — «тритедрадр». В вершине C сошлись 5 ребер — сторон треугольных граней: № 1 — CDF , № 2 — CAD , № 3 — CAB , № 6 — CEF и № 8 — CBE . Остальные грани: № 4 — ABF , № 5 — BEF , № 7 — ABE . Просматриваются и три, как бы «склеенные», тетраэдра: $CABF$, $CBEF$ и $CADF$.



ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ГОЛОВОЛОМКА

Анализ. Пусть ABC — искомый прямоугольный треугольник (рис. а). Его катеты a и $b > a$, h — высота, удовлетворяющая требованию:

$$a^2 + h^2 = b^2. \quad (1)$$

Имеем:

$$AD^2 + h^2 = b^2. \quad (2)$$

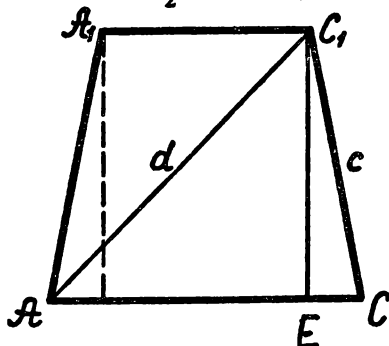
Из (1) и (2) следует: $AD = a$, то есть длинная часть гипотенузы должна быть равной короткому катету.

Построение. На луче Bx (рис. б) произвольно выбираем точку D и проводим луч $Dy \perp Bx$. На луче Dy произвольно выбираем точку C и образуем отрезок CB . На Dx откладываем отрезок $DA = BC$ и образуем AC . Треугольник ABC — искомый.

Впрочем, для полного завершения решения надо еще доказать, что построенный таким образом треугольник ABC — действительно прямоугольный с катетами $BC = a$ и $AC = b$ и высотой $CD = h$, связанными соотношением $a^2 + h^2 = b^2$. Не буду лишать рыцарей геометрии удовольствия выполнить требуемое доказательство самостоятельно.

«ПИРАМИДА ПИФАГОРА»

Построим диагональное сечение AA_1CC_1 пирамиды (рис.). Имеем: $AC = a\sqrt{2}$, $A_1C_1 = b\sqrt{2}$. По условию, $a + b = d$; $EC = \frac{\sqrt{2}(a-b)}{2}$. Из треугольника AC_1C :



$$d^2 = 2a^2 + c^2 - 2a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}(a-b)}{2},$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2a^2 + c^2 - 2a^2 + 2ab,$$

откуда

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

И У ЧИСЕЛ БЫВАЮТ ПРИЧУДЫ

Решение к третьему.

Сформируем требуемую сумму трех нечетных чисел:

$$(2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 = 12n^2 + 12n + 11, n \in N,$$

а каждого из «стройных молодцев» вида \overline{aaaa} испытаем делимостью разности $\overline{aasc} - 11$ на 12. Это испытание выдерживает только один из девяти «молодцев»: $\overline{aaaa} = 5555$. (Убедитесь!)

Имеем: $5555 - 11 = 5544$, $5544 : 12 = 462$. Из уравнения $n^2 + n - 462 = 0$ находим $n = 21$, $2n - 1 = 41$. Искомые числа: 41, 43, 45. Действительно: $41^2 + 43^2 + 45^2 = 5555$.

Решение к четвертому.

$$217 = 9^3 - 8^3, \quad 271 = 10^3 - 9^3, \quad 721 = 16^3 - 15^3.$$

Решение к пятому.

Если возраст записать как \overline{ab} , то образуется число

$$\overline{ababab} = 10101 \cdot \overline{ab} = 7 \cdot 13 \cdot 111 \cdot \overline{ab}.$$

Его делимость на 7, 13 и 111 очевидна.

Решение к последнему.

$$\text{Пусть } N = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = a \cdot b,$$

где $a = x + y$, $b = x - y$.

Тогда $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$; x , y — целые, если a и b — оба четные или оба нечетные.

Любое нечетное N , в частности — простое, всегда разложимо на два нечетных множителя a и b .

Четное N разложимо на два четных множителя a и b лишь тогда, когда оно дважды кратно числу 2.

Например, $40 = 10 \cdot 4$ или $40 = 20 \cdot 2$,

тогда $x = 7$, $y = 3$ и $40 = 7^2 - 3^2$,

или $x = 11$, $y = 9$ и $40 = 11^2 - 9^2$.

Четное число 101010 не кратно числу 4 и потому не может быть разложено на 2 четных множителя, следовательно,

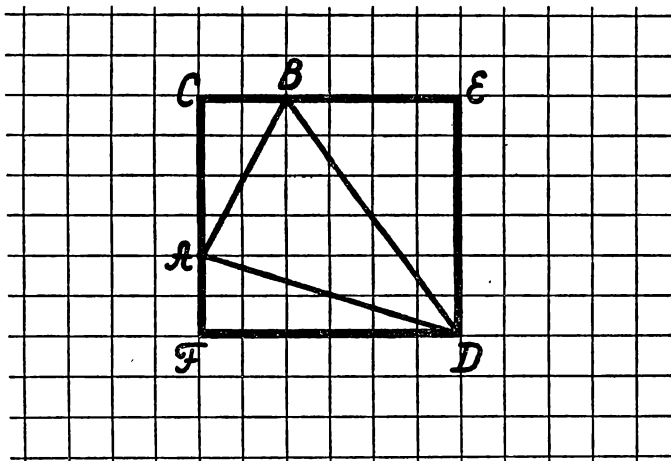
$$101010 \neq x^2 - y^2.$$

Но требуемое разложение числа 101010 становится возможным, как только оно объявит себя принадлежащим четверичной системе. Тогда

$$\begin{aligned} (101010)_4 &= 4^5 + 4^3 + 4 = 1092 = 42 \cdot 26 = \\ &= 34^2 - 8^2 = (202)_4^2 - (20)_4^2. \end{aligned}$$

«БЕЗОБРАЗНУЮ» ПИРАМИДУ ИЗ ЧАСТЕЙ КВАДРАТА

Возможный способ: рассекаем квадрат (см. рис.) прямыми AB , BD и AD ($\frac{1}{2}CF > AF$, $BC = AF$). Затем, отрезанный треугольник ABC переворачиваем и соединяем с треугольником ABD линией AB так, чтобы точка A треугольника ABC совпадала с точкой B треугольника ABD , а точка B треугольника ABC — с точкой A треугольника ABD . Поворачивая треугольники BED , ACB и AFD относительно сторон BD , AB и AD совмещаем все вершины: E , C и F в одну.



ИНТЕРВЬЮ АСТРОНАВТА

Так как при сложении «десятков» ($5 + 2$) получилось не 7, а 11, то, значит, основанием системы счисления является число 6: $(11)_6 = (1 \cdot 6 + 1)_{10} = 7$. Получается, что детей у собеседника астронавта — жителя планеты Z — $(111)_6 = (1 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 1)_{10} = 43$, а щупальцев у каждого аборигена планеты Z , по-видимому, 6.

СКАЗ О ПРЕВРАЩЕНИИ СТЕКЛЯШКИ В АЛМАЗ

Задача 1. Так как $225 = 9 \cdot 25$, то n делится на 9, следовательно, содержит минимально 9 единиц и, чтобы делилось на 25, должно иметь последними цифрами два нуля. Итак, $n = 11111111100$; $q = 49382716$ — каждая цифра от 1 до 9, кроме цифры 5, вошла в состав числа q по одному разу, и сумма каждой пары цифр, равноотстоящих от «концов» в записи частного, равна 10.

«АРИФМЕТИКА» — ТОЧИЛЬНЫЙ КАМЕНЬ СПОСОБНОСТЕЙ

В пятом и шестом примерах сложения применяется десятичная система счисления. Странность пятого результата объясняется тем, что каждая цифра слагаемых и суммы является кодом иных цифр. Расшифрованное действие таково:

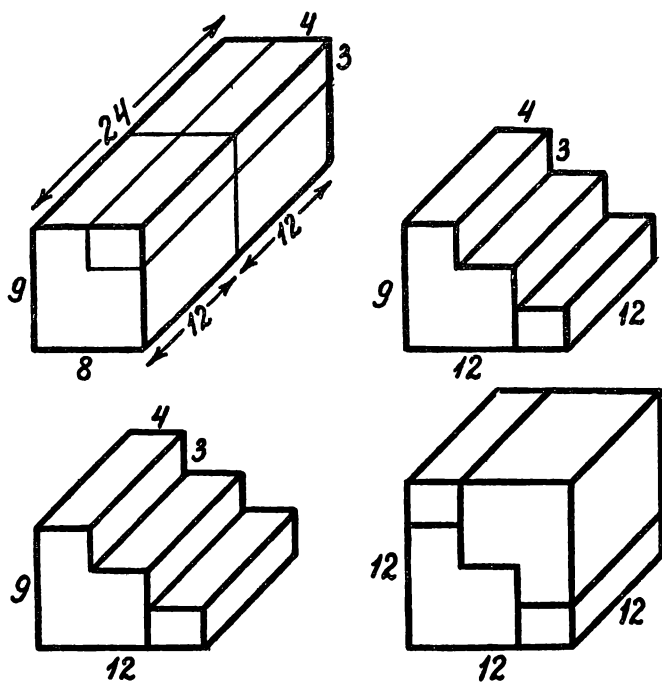
$$955 + 955 = 1910.$$

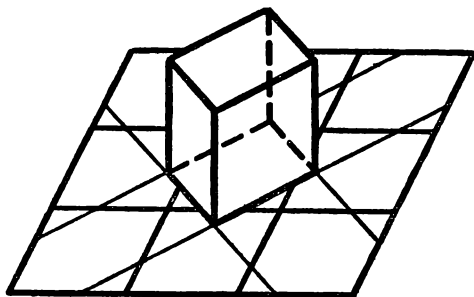
Для решения шестого примера предполагается шутки ради, что числа читаются справа налево, а действие производится слева направо, и тогда — все правильно.



КУБИК НЕ РУБИКА

На рисунке показаны линии трех плоских разрезов бруска. Там же — рисунки частей, на которые распадается брусок, и сформированного из них кубика.





КАК ПРАГМАТИК, ИЛИ КАК МАТЕМАТИК?

Ответ прагматика:

— Ну, что ж, возьмем кубик, квадратный платок (или лист мягкой бумаги) с заданным соотношением линейных размеров ($1 : 3$) и посмотрим, получается ли полное завертывание кубика в платок.

Ответ математика:

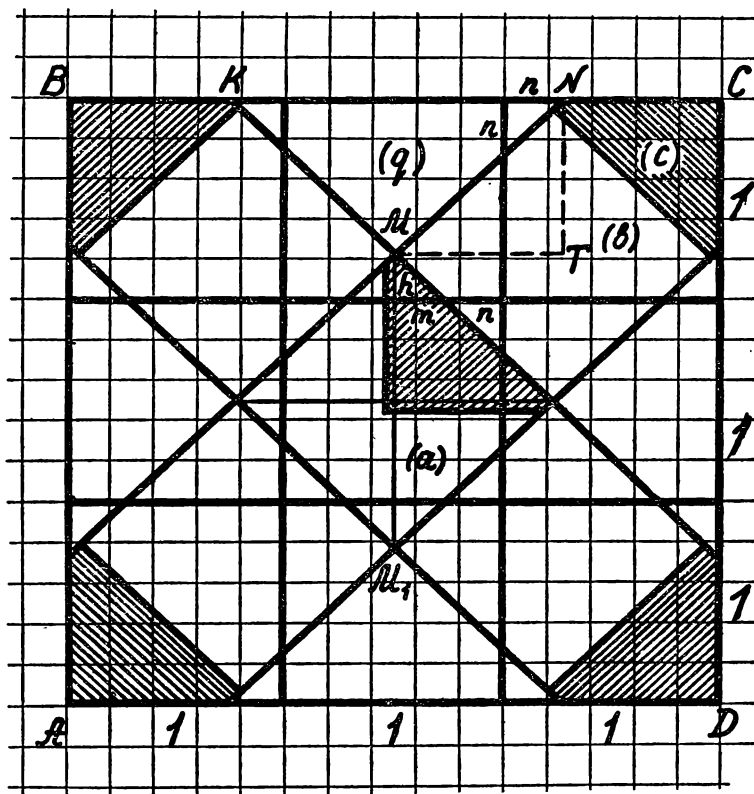
— Чертеж и вычисления показывают, что если поставить кубик ($1 \times 1 \times 1$) на расправленный платок (3×3) так, как на рисунке вверху (ребра основания кубика параллельны диагоналям квадратного платка), то при завертывании кубика, 4 уголка платка (заштрихованная фигура (с) на рис. на с. 294) покроют и даже немного перекроют его верхнюю грань.

При обозначениях, принятых на рисунке, имеем:

$$MM_1 = \sqrt{2}, h = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = m, n = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2},$$

$$MT = NT = \frac{3 - \sqrt{2}}{2}, MN = \sqrt{2} \cdot \frac{(3 - \sqrt{2})^2}{4} = \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} > 1.$$

Площадь фигуры (с), идущей на покрытие части верхней грани кубика, равна $\frac{12 - 7\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} > \frac{1}{4}$ (кв. ед.).





ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЧЕРЕЗ ВЕКА

Нет места на устах для всех имен,
И в памяти всего не сохранить!
Живем осуществляя связь времен,
Но жизни не хватает нам при этом,
Чтоб замыслы свои осуществить.

Расул Гамзатов

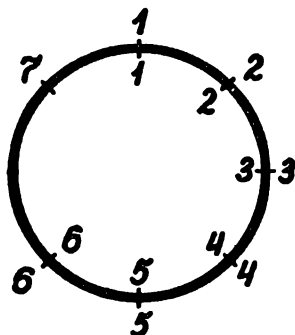
ПИФАГОРЕЙСКИЙ КРУГ

Тройку натуральных чисел (x, y, z) называют пифагоровой, если она является решением уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ — припоминаете теорему Пифагора? Думаю, менее знаком вам «числовой круг пифагорейцев», о котором рассказывает в своем сочинении пифагорец Ямвлих (IV в. н.э.):

— Будем писать по кругу ряд последовательных чисел от 1 до любого заранее намеченного числа n . Дойдя до этого числа n , продолжаем писать по кругу в обратном направлении те же числа, но в порядке последовательного их уменьшения, то есть $(n - 1), (n - 2), \dots, 2, 1$. При этом две единицы окажутся рядом.

Сумма всех написанных чисел дает квадрат числа n . Так, например, пифагорейский круг на рисунке есть символ квадрата числа 7. Действительно, сумма всех чисел этого круга равна $49 = 7^2$.

Средствами алгебры вы моментально докажете действенность способа Ямвлиха получения квадрата любого натурального числа n .



БОГОМ ДАННЫЕ ПРИВИЛЕГИИ ЧИСЛУ 7

... Семь в основе лиры,
Семь в основе Мира.

М. Цветаева

Семь основных звуков в гамме:
До, ре, ми, фа, соль, ля, си.

Символ счастья — семь слонов.

Лук — от семи недуг.

С незапамятных времен число 7 почиталось «священным», «магическим», «мировой константой». Именно числу 7 пифагорейцы отдали привилегию быть символом святости, здоровья и разума.

Позже, в религиозно-нравственном ракурсе, число 7 (3 + 4) олицетворяло общение между богом и его творением — человеком: соединение числа 3 — божественного совершенства и числа 4 — мирового порядка...

В образной логике прозы и стиха:

Число 7 фатально преследовало Раскольникова («Преступление и наказание», Ф.М. Достоевский):

«Приходите-тко завтра, часу в сегом-с», «...он вдруг внезапно и совершенно неожиданно узнал, что завтра ровно в 7 ч вечера Лизаветы, старухиной сестры ... дома не будет».

Идя на убийство старухи-процентщицы именно в 7 ч, Раскольников тем самым уже заранее был обречен на нравственное поражение, так как хотел разорвать «союз» Бога с человеком. Чтобы снова восстановить этот «союз», стать Человеком, Раскольников должен еще раз «пройти» через испытание числом 7. Оно и возникает в эпилоге романа как символ «спасения души»:

«Им оставалось еще семь лет; а до тех пор столько нестерпимой муки и столько бесконечного счастья... Семь лет, только семь лет! В начале своего счастья, в иные мгновения, они оба готовы были смотреть на эти семь лет, как на семь дней».

С чувством благоговения:

URBS AVINIONENSIS

СЕМЬ — число из самых лучших
Для всего, что сердцу мило.
Авиньон в СЕМЕРКЕ черпал
Веру, истину и силу.
Семь ворот в стенах имел он,
Семь созвучий в перезвоне.
Семь грехов свершалось за день
В добронравном Авиньоне.
Семь ключей в воротах града
Семь правителей хранило.
Даже семь мудрейших греков
Родились бы не в Элладе,
Если б мудрость уважали
В Авиньоне, славном граде.
Семь крутов для фарандолы,
Семь церквей для паствы было.
СЕМЬ дворцов зато имел он.
СЕМЬ аббатств различной масти,
Семь обителей для женщин,
Под крестом таящих страсти...

Мария Конопницкая

И восхищения:

СЕМЬ ЧИНАР

СЕМЬ чинар, СЕМЬ чинар,
СЕМЬ раскинутых шатров,
СЕМЬ зеленых великанов
Посреди СЕМИ ветров.
В море зелени — ковчеги,
Крон сплетенные побеги,
Целый край, поля и реки
Оселят в полдневный жар
СЕМЬ чинар, СЕМЬ чинар.
Кто растил деревья эти?
День за днем летят столетия...
И стоит всегда в расцвете
Древо жизни. Жизни дар —
СЕМЬ чинар, СЕМЬ чинар.
Что ты, ветер, так неистов?
Разобьет один удар
Изумруды нежных листьев
Но не сломит СЕМЬ чинар.

Расул Рза

В логике мудрости

С уважением:	Семь пядей во лбу.
С осмотрительностью:	Семь раз примерь, один раз отрежь.
С горечью:	Семь бед — один ответ.
С упреком:	Семь пятниц на неделе.

С философским,
вечно волнующим:
«БЫТЬ, ИЛИ НЕ БЫТЬ?»

Быть (числу 7)...



1. — делителем любого целого числа вида:

\overline{aba} , если $a + b$ делится на 7;

\overline{baa} , если сумма цифр делится на 7;

\overline{aab} , если $a + a - b$ делится на 7;

\overline{abcde} , если \overline{abcdef} делится на 7;

$n(n^6 - 1)$ при любом целом значении n .

Докажите!

2. — последней цифрой каждого из девяти простых чисел, образующих магический квадрат:

307		97
	337	
577		367

4 ячейки оставлены пустыми; потрудитесь их заполнить, сохраняя свойство «магичности» (8 одинаковых сумм. Каких?)

3. — последней цифрой единственно возможного 22-значного числа такого, что, если цифру 7 с последнего места перенести на первое, то образуется число в 7 раз большее исходного.

Найдите это число.

4. — последней цифрой «пятиугольного» числа, то есть производимого выражением $\frac{n(3n-1)}{2}$ при $n = 1, 2, 3, \dots$

Докажите, что такое число существует и найдите его.



Не быть (числу 7 никогда)...

5. — последней цифрой ни одного из «треугольных» чисел, то есть чисел, порождаемых формулой $\frac{n(n+1)}{2}$ при $n = 1, 2, 3, \dots$,

— ни одного из «квадратных» чисел (n^2),

— ни одного из «шестиугольных» чисел, то есть чисел, порождаемых формулой $n(2n - 1)$, при $n = 1, 2, 3, \dots$.

6. — числом ребер многогранника. Это значит, что многогранник может иметь 6 ребер (например, треугольная пирамида), 8, 9, 10, ... ребер, но не существует многогранника, имеющего ровно 7 ребер: многогранник отвергает число 7.

Доказывайте или опровергайте это утверждение!

7. — трижды семь раз не быть семерке делителем числа СЕМЬ, если С, Е, М, Ъ — простые числа (ребус). Найдите все значения числа СЕМЬ, не кратные числу 7.



ЗАВЕЩАНИЕ МАГАРАДЖИ

Один магараджа оставил в наследство своим шести сыновьям довольно много алмазов одинаковой стоимости и завещал:

первому сыну — один алмаз и $\frac{1}{7}$ часть остальных,

второму сыну — 2 алмаза и $\frac{1}{7}$ часть остальных,

третьему — 3 алмаза и $\frac{1}{7}$ часть остальных, и т.д.

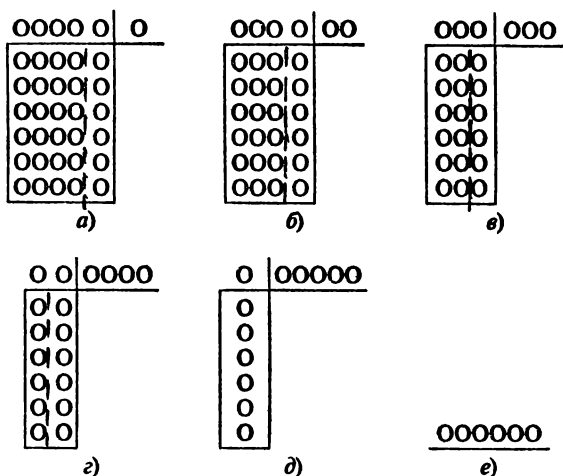
После такого разделения оказалось, что каждый из шести сыновей получил равное количество алмазов.

Сколько всего алмазов унаследовали сыновья магараджи?

Решение простое. Так как наследство магараджи было полностью разделено последовательно между шестью сыновьями, то после получения шестым сыном своей доли остатка не должно образоваться, следовательно, его доля и составила полагающиеся ему последние шесть алмазов.

По условию все сыновья получили по одинаковому количеству алмазов, то есть — по 6. Следовательно, наследство состояло из 36 алмазов.





В древних источниках процесс решения представлялся в наглядной форме (см. рис.).

В позиции (а) кружки, изображающие алмазы, размещены столбиками в 7 рядов и отдельно одним кружком в первой строке ($1 \text{ алмаз} + \frac{1}{7} \text{ остальных} = 6 \text{ алмазов}$).

Кружки прямоугольника переносятся в позицию (б), причем столбик, отделенный пунктиром, становится верхней строкой в этой позиции ($2 \text{ алмаза} + \frac{1}{7} \text{ остальных}$).

Аналогично формируются остальные позиции.

Задачу магараджи нетрудно решить и алгебраически, но я предложу более заманчивый для вас вариант: решить эту задачу, полагая неизвестным не только число наследуемых алмазов, но и число наследников, а может быть придумаете и другой наглядно-геометрический путь ее решения?

ЗАДАЧА-ЛЕГЕНДА

Однажды царь приказал Архимеду установить, сколько потребуется золота, чтобы оно по весу равнялось весу слона.

Но таких весов, чтобы взвесить слона, нигде не оказалось.

Архимед решил эту задачу простым, остроумным способом.

Что вы предложили бы, будь на месте Архимеда?

«ДАЙТЕ МНЕ ТОЧКУ ОПОРЫ — И Я СДВИНУ ЗЕМЛЮ»

Счастлив, кто точку Архимеда
Умел сыскать в себе самом, —
Кто, полный бодрого терпенья,
Расчет с отвагой совмещал —
То сдерживал свои стремленья,
То своевременно дерзал.

Ф. Тютчев

Конечно, эта горделивая реплика Архимеда — не более чем эмоциональная метафора гения, предощутившего блестящую научно-техническую будущность открытого им «закона рычага».

Предположим, что все-таки нашлась где-то, разумеется — вне Земли, надежная «точка опоры», прочный рычаг, и мы теперь, по Тютчеву, с запасом «бодрого терпенья, расчет с отвагой» совместим. Сначала установим — каким должно быть отношение длинного плеча рычага к короткому, чтобы «сдвинуть Землю» хотя бы на 1 см, полагая, что массу Земли в $6 \cdot 10^{24}$ кг на конце короткого плеча рычага уравновешивает масса 60 кг на конце длинного плеча рычага. По закону рычага искомое отношение равно $6 \cdot 10^{24} : 60 = 10^{23}$.

Это огромное число в несколько тысяч миллионов раз больше расстояния от Земли до Солнца.

Чтобы конец короткого плеча поднялся (вместе с Землей) на 1 см, конец длинного плеча должен опуститься на $1 \cdot 10^{23} \text{ см} = 10^{18} \text{ км}$.

Сколько же секунд (или лет?) понадобилось бы Архимеду, чтобы сдвинуть Землю на 1 см, если допустить, что конец длинного плеча такого рычага опускается с фантастической скоростью — скоростью света — 300 000 км/с?

Хватило бы жизни Архимеду для осуществления своего замысла?

... Но я привык. И кажется порой:
Он попадетсЯ в руки мои длинные —
Рычаг, такой весомости предмет,
Что, понатужась, Землю с места сдвину я,
Чего не мог и мудрый Архимед.

Леонид Мартынов

СЮРПРИЗЫ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Диофантовым называют уравнение с любым количеством переменных, когда интересуются поиском только целочисленных решений.

Одно из таких уравнений: $x^2 + y^2 = z^2$ порождено знаменитой теоремой Пифагора. Тройку целых решений (x, y, z) этого уравнения называют пифагоровой триадой.

Сюрприз первый. Из простейшей пифагоровой триады $(3, 4, 5)$ закономерно «вылущивается», подобно цыплятам, целый «птичник» пифагоровых триад. Взгляните:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \rightarrow 5^2 + (5 + 3 + 4)^2 = (5 + 4 \cdot 2)^2, \text{ т.е.}$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2 \rightarrow 7^2 + (7 + 5 + 12)^2 = (5 + 4 \cdot (2 + 3))^2, \text{ т.е.}$$

$$7^2 + 24^2 = 25^2 \rightarrow 9^2 + (9 + 7 + 24)^2 =$$

$$= (5 + 4 \cdot (2 + 3 + 4))^2, \text{ т.е.}$$

$$9^2 + 40^2 = 41^2 \rightarrow 11^2 + (11 + 9 + 40)^2 =$$

$$= (5 + 4 \cdot (2 + 3 + 4 + 5))^2, \text{ т.е.}$$

$$11^2 + 60^2 = 61^2, \text{ и т.д.}$$

Характеристические связи между элементами каждой пифтройки этого «семейства»: а) $z - y = 1$, б) $z + y = x^2$.

Сюрприз второй. Известны два решения диофантова уравнения $x^2 + y^2 = k$, где k — какое-то целое число, все цифры которого одинаковы: $3^2 + 18^2 = 333$ и $15^2 + 21^2 = 666$.

Возможно есть и другие решения, но кто их добудет и как?

Сюрприз третий. Одно решение аналогичного уравнения (с переменными n и k):

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n - 1)^2 + n^2 = k$$

(все цифры числа $k > 10$ — одинаковы) вы подберете легко.

Но неужели оно — единственное?

Богаче решениями уравнение более общего вида:

$$x^2 + (x + d)^2 + (x + 2d)^2 + \dots + (x + (n - 1)d)^2 = k \quad (*)$$

(n — число слагаемых, все цифры числа k одинаковы).

Для этого уравнения, когда слева от знака равенства три слагаемых, одно решение приведено в книге Ш. Еленьского «По следам Пифагора» (М.: Детгиз, 1961):

$$41^2 + 43^2 + 45^2 = 5555 \quad (d = 2),$$

и 4 решения удалось подобрать учителю Бовсуновскому Н.И.:

$$\begin{aligned} 1^2 + 4^2 + 7^2 &= 66 \quad (d = 3), \\ 25^2 + 41^2 + 57^2 &= 5555 \quad (d = 16). \end{aligned}$$

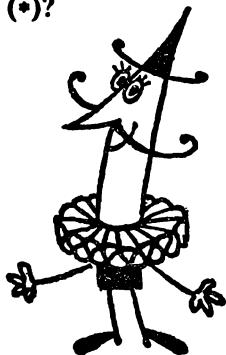
На поиски еще двух его решений мобилизуйте собственную смекалку, потом загляните на стр. 351.

Интересно решение этого же уравнения с шестью слагаемыми по левую сторону от знака равенства:

$$11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 = 1111 \quad (d = 1). \quad (**)$$

Поскольку все цифры числа k — единицы, то нетрудно смекнуть, каким образом это решение можно моментально превратить в два решения двух уравнений с иными значениями числа k , но без нарушения условия, чтобы цифры числа k были одинаковыми. Потом загляните на с. 351.

Не продвинулся ли кто-нибудь еще дальше в поиске решений уравнения (*)?



МАГИЧЕСКАЯ СИЛА ЕДИНИЦЫ

ЕДИНИЦА — «героиня» аксиом и «прима» всякого счета. Та самая, о которой говорится «мал, да удал». Без единицы не состоялась бы даже самая примитивная система счисления — двоичная. Она — самый древний предок современного семейства чисел. Примечательно, что только она одна из всех числительных имеет свое множественное число:

один, одна, одно — в единственном числе,
одни — во множественном.

Но дружбы нет и той меж нами.
Все предрассудки истребя
Мы почитаем всех нулями,
Но единицами себя.

А.С. Пушкин «Евгений Онегин»

«Первый человек не чувствовал себя одиноким, он ведь не умел считать», — остроумно пошутил Станислав Ежи Лец.

Вот так то! И в жизни, и в математике не раз доказывала Единица, что — «И один в поле воин». В задаче она, иной раз, — тот «мазок», который делает прекрасным все «полотно» ее решения.

Более трехсот лет, с 1630 г., будоражит умы «великая теорема Ферма»: *уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет целочисленных решений при натуральном $n > 2$* . «Но недостаток места не позволяет мне записать доказательство», — написал Ферма на полях страницы книги Диофанта.

Не пугайтесь, речь не пойдет об очередной попытке поймать неуловимое доказательство. Мы здесь полушутя, полусерьезно покажем, что может маленькая единица сделать с великой теоремой.

Достаточно прибавить единицу к одному из показателей степени — и труднейшая проблема преобразуется в несложную, красиво решаемую, задачу: *найти целые корни уравнения*

$$x^n + y^n = z^{n+1}.$$

Чтобы помочь вам «изобрести» красивое решение уравнения в общем виде, покажу на примере уравнения $x^3 + y^3 = z^4$ — как найти какое-нибудь частное решение. Беру произвольно два натуральных числа, скажем, 2 и 3 и полагаю $z = 8 + 27 = 35$, $x = 35 \cdot 2 = 70$, $y = 35 \cdot 3 = 105$. Подставляя эти значения в заданное уравнение, получаю верное равенство:

$$70^3 + 105^3 = 35^4.$$

ГРУЗИНСКИЕ КОЗЫ И РУССКИЕ ОВЦЫ

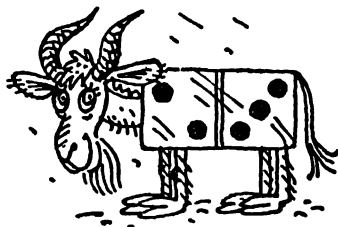
Жизненные ситуации, связанные с проблемой разделения имущества между членами семьи и в давние времена возбуждали фантазию не только создателей «детективов», но и сочинителей так называемых «народных» занимательных задач. Этической основой их сюжетов почти всегда является идея справедливого разделения.

Вот к примеру два «народных» сюжета: о грузинских козах (Сулхан-Саба Орбелиани «Мудрость вымысла», XVII—XVIII вв.) и русских овцах («Математика в школе», № 2, 1994).

1. Поделите между тремя братьями 30 коз — 10 с одним козленком, 10 — с двумя и 10 — с тремя козлятами, но так, чтобы каждому брату досталось поровну и коз, и козлят и, чтобы ни одного козленка не разлучать с его матерью.

2. Два брата А и Е (Андрей и Еремей) имели в общем владении отару овец. Они решили продать совместную собственность и поделить деньги пополам. За каждую овцу они взяли столько рублей, сколько было первоначально овец. Стали делить выручку: А взял 10 р. и столько же отдал брату Е; так продолжалось до тех пор, пока не остались одна десятка и несколько рублей. Андрей взял себе десятку, рубли отдал Еремею и вдобавок отдал ему свой нож. Дележ закончен.

Какова стоимость ножа?



ВЕНЕЦИАНСКАЯ ШУТКА С МАТЕМАТИЧЕСКИМ СМЫСЛОМ (XVI в.)

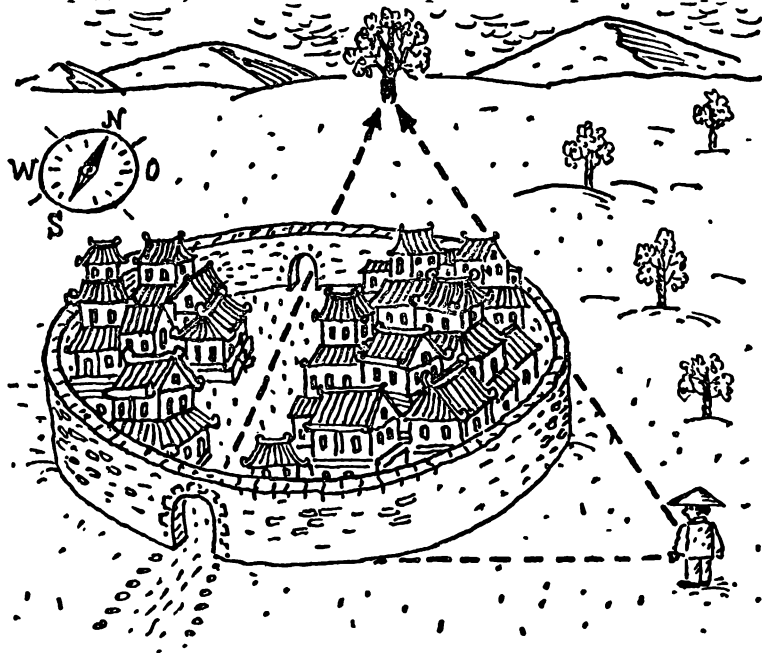
Если четверть двадцати равна четырем, то сколько будет треть от десяти? Решение простое — арифметическое. Но придумайте геометрическую интерпретацию (изображение) решения этой задачи.

СТАРИННАЯ КИТАЙСКАЯ ЗАДАЧА

Китайский математик Цинь Цзю-шао, живший в XIII веке, предложил такую задачу.

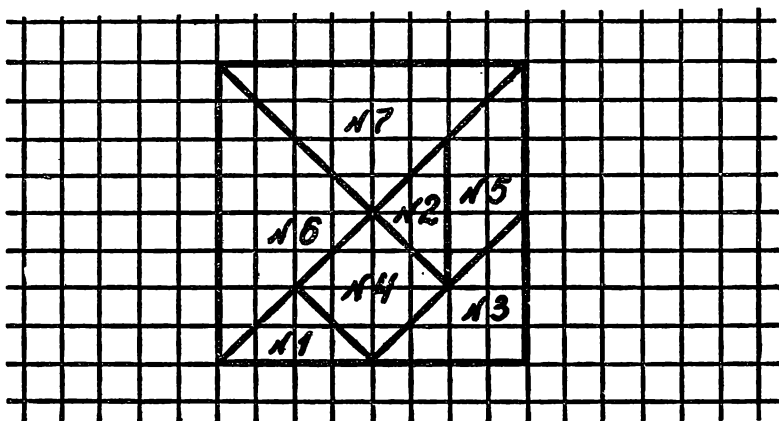
Город обнесен по кругу стеной с двумя воротами — на север и на юг. Если выйти из северных ворот и идти на север, то через 300 шагов придешь к большому дереву. Если же выйти из южных ворот и идти на восток, то это же дерево можно будет увидеть, пройдя 900 шагов (см. рис.).

Определить, скольким шагам равен поперечник города.



ШИ-ЧАО-ТЮ

Китайское название игры-головоломки — комплекта из семи геометрических фигур — частей одного квадрата:

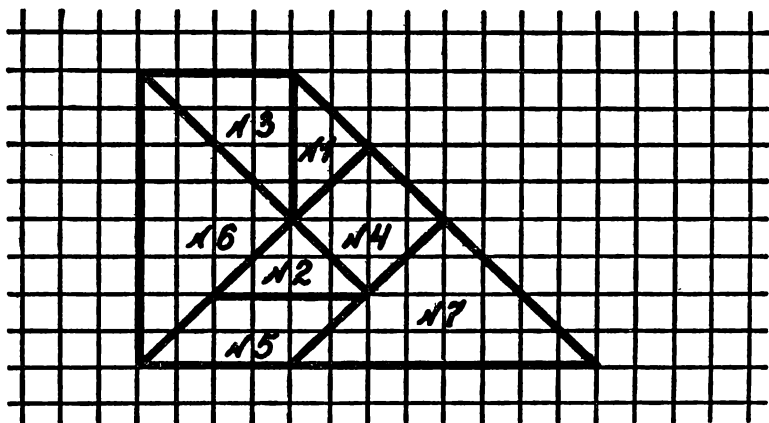


Любопытно, что если два самых малых равнобедренных прямоугольных треугольника (№ 1 и № 2 на рисунке) считать первичными, как бы — «атомами», то треугольник № 3, квадрат № 4 и параллелограмм № 5 состоят из двух «атомов» каждый, треугольники № 6 и № 7 — из четырех «атомов» каждый. Весь квадрат, следовательно, — «шестнадцатиатомная» фигура.

Древние греки и римляне развлекались выкладыванием разнообразных форм из 14 геометрических фигурок, на которые был разрезан прямоугольник, по-видимому, еще Архимедом.

В Европе и США игра ШИ-ЧАО-ТЮ распространилась с начала XIX в., а к середине века приобрела название «ТАНГРАМ», возможно, в честь древнекитайского учено-

го, имя которого Та-нг. Кажется, именно ему обязана своим первым появлением (за 2000 лет до Р.Х.) эта увлекательная игра-головоломка. Суть головоломки в том, чтобы выложить заранее заданную фигуру — «танграм» —, используя всякий раз все 7 частей танграма, названных «ТАНАМИ». «Тан» разрешается выкладывать как лицевой, так и оборотной стороной. Для примера на рисунке показан танграм — трапеция.



В 1942 г. два китайских математика, Фу Трен-ван и Чуань Ши-сюнь, опубликовали статью с остроумно выполненным обоснованием следующего утверждения: если интересоваться только выпуклыми многоугольниками (у которых все внешние углы при вершинах больше 180°), то из 7 танов можно выложить не более, чем 13 различных выпуклых фигур. (Многоугольники, переходящие друг в друга при поворотах и отражениях различными не считаются.)

В числе возможных тринадцати: один треугольник, 6 четырехугольников (квадрат, прямоугольник, параллелограмм, три вида трапеций), два пятиугольника и 4 шести-

угольника. В дополнительной реплике авторы статьи отмечают, что один из возможных шестиугольников долгое время «ускользал» от практического воплощения. Не легко дается, как вы можете убедиться, составление и остальных трех шестиугольников.

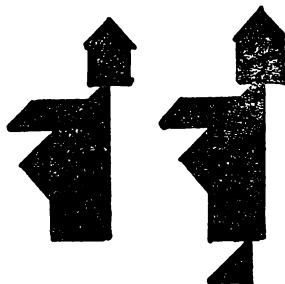
Начертите на листе картона, и аккуратно вырежьте, комплект из семи танов, «упакованных» в квадрат, как на рисунке на с. 310.

1. Выложите из этих семи танов: треугольник, прямоугольник (в двух вариантах расположения составляющих танов), параллелограмм, трапецию в дополнение к изображенной на странице 311, выпуклый пятиугольник хотя бы один и все 4 вида выпуклых шестиугольников.

2. Окрасьте обе стороны танов в черный цвет и предложите своим младшим друзьям (от 4 лет и старше) конструктивное развлечение по составлению силуэтов, подсказанных собственной фантазией, или изображенных на странице 313, часть которых перенесена сюда из другой моей книги: Удивительный квадрат, АО «СТОЛЕТИЕ», 1994.

Практическое решение предложенной задачи потребует завидного старания и терпения. Нетерпеливые найдут подсказку в разделе «Решения».

3. Танграм — парадокс:



Каждый из двух сходных силуэтов человечка выложен, как полагается, из всех семи «танов», но куда же спрятал ногу тот, что слева?

Напоминаю: «таны» должны прикладываться один к другому без малейшего наложения, и в силуэте не должно быть отверстий.

Выложите оба силуэта.



Мостик.



Молоток.



Телефон.



Револьвер.



Кепка.

Женщина
у зеркала.Молодая
женщина.

Восьмерка.

Сидящий
человек.Женщина
с платком.

Журавль.



Кошка.



Кенгуру.



Заяц.



Собака.



Кораблик.



Паровоз.



Свечка.



Домик.



Трубка.



Всадник.



Гусь.



Курица.



Рыба.



Поросенок.

В СТАРИНУ И ТАК УМНОЖАЛИ НА РУСИ

Ясно, как дважды два

Поговорка

Ну, что ж, пословица права!
И все известно в мире:
Что дважды два есть дважды два,
Не три, не пять — четыре...

Е. Винокуров

Умножали оригинально, остроумно, применяя только 3 действия: деление на 2, умножение на 2 и сложение.

Чтобы перемножить, например, числа 267 и 38, одно из них — любое — делят на 2 (с отбрасыванием остатка) и продолжают деление на 2 до получения 1, записывая результаты столбиком, а другое число умножают и повторно умножают на 2, записывая результаты вторым столбиком.

: на 2	× на 2
38	267
19	534
9	1068
4	2136
2	4272
1	8544
	10146

В столбце умножения на 2 зачеркивают числа, находящиеся рядом с четными из столбца деления на 2. Складывают числа, оставшиеся незачеркнутыми и... результат готов: $267 \cdot 38 = 10146$.

Удивительный способ! Выглядит как некий фокус... Тем не менее имеет математическую основу (связанную с двоичной системой счисления), о которой, разумеется, ни малейшего представления не имели простые люди из на-

рода, применявшие такой способ умножения. Его «изобретение» — проявление чисто народного творчества, интуиции и природной смекалки российских крестьян.

Не исключено, что в те же далекие времена кто-то сокращал процедуру умножения, оперируя не двойкой, а тройкой.

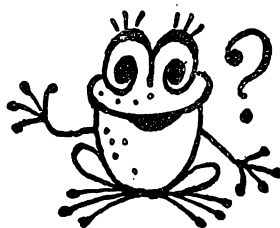
Например, умножить 147 на 89 он мог бы так:

× на 3	: 3	остаток
147	89	— 1
441	30	0
1323	10	+ 1
3969	3	0
11907	1	+ 1

$$11907 + 1323 - 147 = 13083$$

Пояснение. Если остаток от деления на 3 равен 2, то частное берем с превышением и в столбце остатков пишем — 1 ($89 : 3 = 30$, остаток — 1). Для получения окончательного результата, в столбце умножения на 3 складываем числа, стоящие в строках с остатком + 1 и вычитаем числа, стоящие в строках с остатком — 1.

Воспринимайте сказанное здесь просто как напоминание о достойном восхищения эпизоде из истории развития культуры счета на Руси. Те, кто задумается над математическим обоснованием безотказного действия этого самобытного древнерусского алгоритма умножения (без знания таблицы умножения более, чем на 2 и на 3), несомненно получат интеллектуальное удовольствие.



ИНДИЙСКИЙ ПРИЕМ УМНОЖЕНИЯ

Способ прост и эффективен, когда дополнения множителя и множителя до 100, 1000, ... легко перемножить в уме.

Примеры: *Сомножители близки к числу 100:*

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & \begin{array}{r} 97 \quad \diagdown \quad 3 \\ \times \quad \quad \diagup \quad 14 \\ \hline 86 \quad \quad 42 \\ 83 \quad \quad 42 \end{array} & \begin{array}{l} \text{— дополнение до 100} \\ \text{— дополнение до 100} \\ \text{— последние два разряда} \end{array}
 \end{array}
 \quad (3 \cdot 14 = 42)$$

в искомом произведении; начальные разряды получаются вычитанием из любого сомножителя «чужого» дополнения: $86 - 3$ или $97 - 14 = 83$.

Итак, $97 \cdot 86 = 8342$.

$$\begin{array}{rcl}
 (2) & \begin{array}{r} 89 \quad \diagdown \quad 11 \\ \times \quad \quad \diagup \quad 54 \\ \hline 46 \quad \quad 54 \\ (46-11)+5 \quad (5)94 \end{array} &
 \end{array}$$

$11 \cdot 54 = 594$. В запись произведения идут последние два разряда (94); число 5 — старший разряд — прибавляется к разности $46 - 11$.

Итак, $89 \cdot 46 = 4094$.

Сомножители близки к числу 1000:

$$\begin{array}{rcl}
 (3) & \begin{array}{r} 968 \quad \diagdown \quad 32 \\ \times \quad \quad \diagup \quad 28 \\ \hline 972 \quad \quad 28 \\ 940 \quad \quad 896 \end{array} & \begin{array}{l} 32 \cdot 28 = 896 \text{ — последние} \\ \text{три разряда; } 968 - 28 = 940 \text{ —} \\ \text{начальные разряды.} \end{array}
 \end{array}$$

Итак, $968 \cdot 972 = 940896$.

$$\begin{array}{rcl}
 (4) & \begin{array}{r} 878 \quad \diagdown \quad 122 \\ \times \quad \quad \diagup \quad 308 \\ \hline 692 \quad \quad 308 \\ (878-308)+37 \quad (37)576 \end{array} & \text{Итак, } 878 \cdot 692 = 607576.
 \end{array}$$

«ВОЛШЕБНАЯ КУВШИНКА»

Площадь поверхности озера, покрываемая одной кувшинкой, каждый день увеличивается вдвое. Через 10 дней вся поверхность озера оказывается покрытой ею.

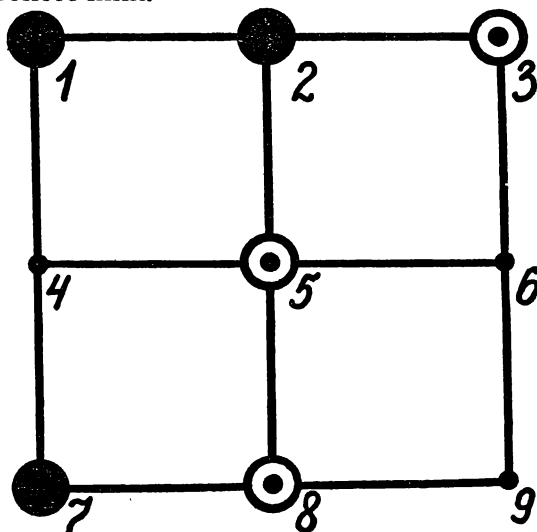
За сколько дней покроют все озеро ДВЕ волшебные кувшинки?

Остерегитесь манящего желанья ответить сходу: «две кувшинки покроют озеро за 5 дней». Подумайте, посчитайте!

Если уверены, что рассуждаете правильно, то ответьте на дополнительные вопросы: За сколько дней покроют все озеро ЧЕТЫРЕ волшебные кувшинки? А ВОСЕМЬ кувшинок? А ШЕСТНАДЦАТЬ?

«КРЕСТИКИ-НОЛИКИ» ПО ОВИДИЮ И ШЕКСПИРУ

О некотором варианте этой, с давней поры известной игры, упоминается в сочинении Овидия. Шекспир в комедии «Сон в летнюю ночь» ссылается на «Nine Men's Morris» как на первоисточник.



Игровое поле — квадратная сеть с девятью «узлами» — точками (см. рис. на с. 317). Играют двое. У первого 3 черные фишки, у второго — 3 белые фишки. Игроки поочередно ставят фишки, по одной, на не занятые узловые точки. Побеждает тот, кому удастся выложить свои три фишки в одну прямую линию.

Если выставленные шесть фишек не принесли победы никому, то, продолжая соблюдать очередность ходов, игроки передвигают свои фишки на соседнюю не занятую точку.

Например, в положении, изображенном на рисунке на с. 317, если очередной ход «белых», они могут передвинуть фишку из точки 8 в точку 9. Теперь никаким своим ходом «черные» не смогут воспрепятствовать сделать очередной ход фишкой с поля 5 на поле 6 и победить.

Предположим, оба игрока одинаково умело ведут игру, — чем окончится игра: 1) обязательно выиграет делающий ход первым, 2) обязательно выиграет делающий ход вторым, 3) никто не выиграет.

КАК ЭТО ВОЗМОЖНО?

Одна итальянка, отправляя на рынок трех своих дочерей с апельсинами, дала старшей 50 штук, средней 30, а младшей — маленькой девочке — вложила в корзину 10 апельсинов. Наказала дочерям продавать товар как можно выгоднее, но по одинаковой цене, чтобы не создавать самим себе взаимной конкуренции.

Как же удивилась их мама, когда вернувшиеся дочери сказали, что торговали точно соблюдая ее указания, и выручки каждой оказались одинаковыми.

— Как это возможно, чтобы продавая по одинаковой цене выручить одинаковые суммы за 50, за 30 и за 10 апельсинов? Вы просто шутите?!

Но все оказалось правдой. Раскройте же секрет юных торговек!

ФИЛОСОФСКАЯ ЗАГАДКА ВОЛЬТЕРА (В СВОБОДНОМ ПЕРЕЛОЖЕНИИ)

Что самое быстрое, но и самое медленное, самое большое, но и самое маленькое, самое продолжительное и краткое, самое дорогое, но и дешево ценимое нами?

А В РЕАЛЬНОЙ СИТУАЦИИ?

Что быстрее — проехать весь путь на велосипеде или половину пути на мопеде, который движется вдвое быстрее велосипеда, а другую половину пути пешком — вдвое медленнее, чем на велосипеде?

Не возникает ли интуитивное предположение: «одинаково»? Ведь полпути — вдвое медленнее, но еще полпути — вдвое быстрее.

Ну, а каков вывод при внимательном рассмотрении? Если, например, привлечь график?

ТОРГОВАЛИ — ВЕСЕЛИЛИСЬ, ПОДСЧИТАЛИ — ПРОСЛЕЗИЛИСЬ

Эта прибаутка не имеет прямого отношения к предпринимательству тех купцов, о которых поведал в одной из своих арифметических задач величайший математик XVIII века — Леонард Эйлер (1707 — 1783):

«Каждый из нескольких купцов внес в общее дело сто раз столько рублей, сколько было купцов. Купцы отправили в Венецию доверенного, получившего прибыль: с каждой сотни рублей — число рублей, вдвое большее числа купцов. Спрашивается, сколько было купцов, если доверенный привез им 2662 рубля?»

Примечание (не подсказка, а занимательный факт). Искомое число примечательно тем, что оно само и его вторая, третья и четвертая степени — палиндромические числа, то есть каждое равно обращенному, например, как 373, 1991, ...

МЕЖДУ ПРОЧИМ...

Когда к цифре 2 прижимаются n единиц слева и n единиц справа, то образуется палиндромическое число:

$$\underbrace{11 \dots 11}_{n \text{ цифр}} \underbrace{1211 \dots 11}_{n \text{ цифр}}$$

Эйлер легко доказал бы, что при всяком значении n это число — не простое, то есть разложимо на множители, например, $121 = 11 \cdot 11$, $11211 = 111 \cdot 101$. Но Эйлера нет, и я надеюсь на ваше желание придумать короткое доказательство.

СУВЕНИР ИЗ ИНДИИ

Не счесть жемчужин в море
Полуденном далекой Индии чудесной.

Из «Садко»

Тот сувенир — не жемчуг, не алмаз — колечко чисел в этот раз, а в нем квадрат, искусно сотканный из младших натуральных чисел (рис. на с. 321). Квадрат — безделица, но, полагаю, — талисман: все его вертикали и горизонталы суть расчлененные квадраты ($1^2 = 1$, $2^2 = 1 + 2 + 1$, $3^2 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1$, и т.д.) Зато колечко — чудо магии чисел, составленных из цифр, объединяемых дугами:

по движению стрелки часов:

$$04, 20, 34, 12, 50, 42, 03, 41, 53, 15, 31, 25 \quad (*)$$

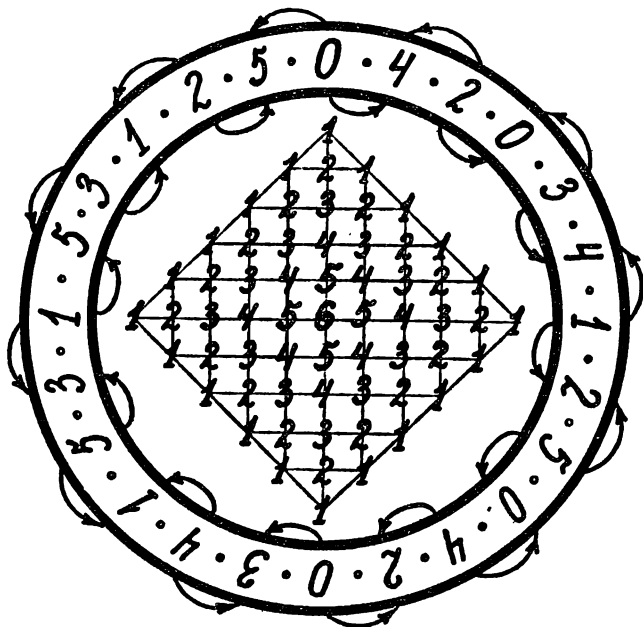
против движения стрелки часов:

$$05, 21, 35, 13, 51, 43, 02, 40, 52, 14, 30, 24 \quad (**)$$

Очаровательны свойства этих двух последовательностей:

1) равны суммы чисел:

$$04 + 20 + \dots + 31 + 25 = 05 + 21 + \dots + 30 + 24 = 330,$$



2) равны суммы квадратов чисел:

$$04^2 + 20^2 + \dots + 31^2 + 25^2 = \\ = 05^2 + 21^2 + \dots + 30^2 + 24^2 = 12290,$$

3) равны суммы кубов чисел:

$$04^3 + 20^3 + \dots + 31^3 + 25^3 = \\ = 05^3 + 21^3 + \dots + 30^3 + 24^3 = 514800.$$

Убедитесь!

Перепишите в строку числа последовательности (*), расположив их в порядке возрастания. В следующую строку запишите числа последовательности (**), расположив их в порядке убывания.

Какое еще одно обворожительное свойство чисел чудокольца удастся вам подметить?

Рассказал об этом Харди как-то на одном из заседаний английского математического общества, а кто-то из математиков и спросил его: «Может быть, это число хотя бы еще и простое?».

Конечно же, бывает такое и с математиками. Видимо, упустил из внимания спрашивающий, что сумма двух кубов всегда разложима.

Из равенства $1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$ немедленно следует, что $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ — произведение трех последовательных членов арифметической прогрессии.

К свойству, подмеченному Рамануджаном, можно присоединить еще несколько любопытных особенностей числа 1729:

1) $1729 = 27^2 + 10^3 = 1^2 + 12^3$;

2) суммой двух квадратов оно непредставимо, но

$$1729 = 8^2 + 12^2 + 39^2 = 2^2 + 5^2 + 10^2 + 40^2 \text{ и т.д.};$$

3) $1729 = 1 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144 + 377 + 987$, где все слагаемые — числа Фибоначчи.

ИМЕННЫЕ И БЕЗЫМЯННЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Треугольник Тарталья

$$\begin{array}{r} 1 + \underline{2} = 3 \\ 4 + 5 + \underline{6} = 7 + 8 \\ 9 + 10 + 11 + \underline{12} = 13 + 14 + 15 \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Подчеркнутое число равно произведению числа слагаемых слева и справа от знака равенства.

Треугольник Паскаля

$$1 + 2 + \dots + 7 + 8 = 6^2$$

$$9 + 10 + \dots + 15 + 16 = 10^2$$

$$17 + 18 + \dots + 48 + 49 = 33^2 \text{ — в строке 33 слагаемых}$$

$$50 + 51 + \dots + 148 = 99^2 \text{ — в строке 99 слагаемых}$$

$$149 + 150 + \dots + 445 = 297^2 \text{ — в строке 297 слагаемых}$$

.....

Интересен числовой треугольник, образующийся из последовательности нечетных чисел:

	N_0
$1^3 = 1$	1
$2^3 = 3 + 5$	2
$3^3 = 7 + 9 + 11$	3
$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$	4
.....	...
$n^3 = L + \dots + M$	n

Назовем его «треугольником Фибоначчи» на том основании, что, как предполагают, Фибоначчи использовал этот числовой треугольник для вывода формулы:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

Рассуждал он, возможно, так: номер строки (столбец N_0) совпадает с числом слагаемых в строке, следовательно, всего в n строках треугольника содержится $S = \frac{(1+n)n}{2}$ элементов.

Последний элемент в n -й строке есть S -й член арифметической прогрессии ($a_1 = 1$, $d = 2$) $\Rightarrow M = 1 + 2(S - 1) = 2S - 1$.

Первый элемент $L = M - 2(n - 1)$.

Сумма элементов n -й строки равна $\frac{(M+L)n}{2} = (2S - n)n = n^3$, что и доказывает истинность подмеченной закономерности для суммы элементов любой строки треугольника.

Складывая строки треугольника, получаем:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + M}_{S \text{ слагаемых}} = \frac{(1+M)S}{2} = S^2 = (1 + 3 + 5 + \dots + n)^2.$$

В этой формуле слагаемыми являются по порядку идущие числа натурального ряда: 1, 2, 3, ...

Французский математик XIX в. Жозеф Лиувиль поставил более широкую задачу: найти произвольные целые числа a, b, c, d, \dots , сумма кубов которых равнялась бы квадрату их суммы.

$$a^3 + b^3 + c^3 + \dots = (a + b + c + \dots)^2.$$

Среди чисел a, b, c, \dots допускаются и равные между собой.

Лиувилью удалось получить занятный результат, суть которого легко уяснить на следующих двух примерах.

Пример 1. Возьмем число 6. Оно делится на 1, 2, 3 и 6. А сколько же делителей у каждого из этих делителей? У числа 1 — один делитель, у числа 2 — два делителя (1 и 2), у числа 3 — два делителя (1 и 3) и, наконец, у числа 6 — четыре делителя (1, 2, 3 и 6).

Вот эти числа (1, 2, 2 и 4) и удовлетворяют интересующему нас соотношению, то есть имеем:

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = (1 + 2 + 2 + 4)^2.$$

Пример 2. Возьмем число 30. Его делители: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Число делителей у каждого из них соответственно: 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 8. Имеем:

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 + 8^3 = (1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8)^2.$$

Способ простой и остроумный.

Треугольник для четных степеней числа 3

$$3^0 = 1$$

$$3^2 = 2 + 3 + 4$$

$$3^4 = 5 + 6 + \dots + 13$$

$$3^6 = 14 + \dots + 40$$

.....

Треугольник для кубов нечетных чисел

$$1^3 = 1$$

$$3^3 = 2 + 3 + \dots + 7$$

$$5^3 = 8 + 9 + \dots + 17$$

$$7^3 = 18 + \dots + 31$$

.....

Треугольник Никомаха*

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 3 + 5$$

$$3^3 = 7 + 9 + 11$$

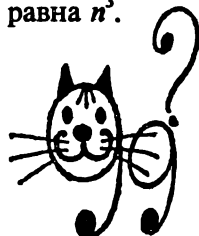
$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$$

.....

Каждая строка — сумма n членов (n — номер строки) арифметической прогрессии с разностью $d = 2$. Первый член каждой строки:

$$a_n = n^2 - n + 1.$$

Задача. Вывести эту формулу и доказать, что сумма чисел в n -й строке треугольника Никомаха равна n^3 .



* Никомах (I — II вв.) — древнегреческий математик и философ, автор труда «Введение в арифметику» (простые числа, пропорции).



АЛФАМЕТИКА — ЗАШИФРОВАННАЯ АРИФМЕТИКА

Это — арифметические равенства, в которых все или некоторые цифры заменены буквами какого-либо алфавита или другими не цифровыми символами. Требуется расшифровать значение каждого символа и восстановить числовую запись действия.

Как разновидность математических развлечений эта форма задач была развита в Индии и Китае уже более, чем 1000 лет назад. На Европейском континенте букво-арифметические головоломки стали появляться в периодической печати в начале 20-го столетия, причем шифровка цифр буквами получила систематическое применение лишь с 1921 года, сначала в журнале «Strand magazin».

В тридцатых годах во Франции издавался журнал «Sphinx», печатавший только материалы, относящиеся к математическим развлечениям. Букво-арифметические задачи, помещенные в «Сфинксе», получили, начиная с мая 1931 года, наименование — *cryptarithmie (фр.)*, *cryptarithmic (англ.)*

С той поры это название стало общепризнанным в европейских и американских журналах. Установился принцип шифровки, оставшийся обязательным и для последующих лет: разные цифры заменять разными буквами, избегая буквы О для замещения нуля; допускается один не буквенный символ, заменяющий любую цифру. Головоломка должна иметь решение — желательно — единственное.

Предлагаю для решения несколько типичных букво-арифметических головоломок тридцатых годов:

$$\begin{array}{r}
 1. \quad \times \text{ ABC} \\
 \quad \text{DE} \\
 \hline
 \quad \text{FEC} \\
 \text{DEC} \\
 \hline
 \text{HGBC}
 \end{array}$$

$$2. \text{ ODER} = 18(\text{DO} + \text{OR})$$

$$\begin{array}{r}
 3. \quad \times \text{ ABC} \\
 \quad \text{BAC} \\
 \hline
 \quad \text{****} \\
 \quad \text{**A} \\
 \hline
 \text{***B} \\
 \hline
 \text{*****}
 \end{array}$$



Интерес к задачам криптоарифметики — числовым головоломкам — возрос после того, как наметилась тенденция осмысленной шифровки, когда буквы, заменяющие цифры, образовывали слова и даже фразы. Первым, кто применил такой вид шифровки, был известный английский проблемист в жанре математических развлечений — Н.Е. Dudeney (Дюдени). Эту новую серию открыли две его буквоарифметические головоломки, появившиеся на страницах журнала «Strand Magazine» в июле 1924 г:

$$4. \text{ send} + \text{ more} = \text{ money} \text{ (пришли больше денег),}$$

$$5. (\text{two}) \cdot (\text{two}) = \text{three} \text{ (дважды два — три)}$$

Первая из них впоследствии обошла весь мир и обрела репутацию классической в этом жанре. Вторая — дала импульс последующим составителям шифров к применению слов — числительных, но без словесных несуразностей вида: дважды два — три. Интересны, например, такие «числоробусы»:

$$\begin{array}{r}
 6. \quad \text{one} \\
 + \text{two} \\
 \hline
 \text{five} \\
 \text{eight}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7. \quad \text{zero} \\
 + \text{one} \\
 \hline
 \text{two} \\
 \text{three}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8. \quad \text{two} \\
 + \text{three} \\
 \hline
 \text{seven} \\
 \text{twelve}
 \end{array}$$

Наведен «порядок» и в таблице умножения. Теперь:

9. ДВА × ДВА = ЧЕТЫРЕ («Квант», № 12, 1971)

В 1955 г. канадский математик J.A.H. Hunter предложил новый термин для объединения головоломок с осмысленным шифром — «alphametic». Забавно, что это слово образовалось вследствие описки. Как рассказывает J. Hunter, один из его корреспондентов несколько раз употребил в письме слово alphabetical (алфавитный) и один раз с опиской: alphametical.

Так случайно образовался «гибрид» двух слов: начало слова «алфавит» и окончание слова «арифметика» — «АЛФАМЕТИКА», — значит, буквоарифметика.

Для решения задач алфаметики нет регулярного правила. Надо рассуждать, подбирать, опираясь на основные положения арифметики, на свойства чисел. Например, наблюдая структуру вида АЛ + ЫЙ = МАК, легко заключить: М = 1, значением Ы может быть только число 9, при этом Л + Й ≥ 10. Иногда бывает необходимо составить таблицу предполагаемых значений буквы, которая, в свою очередь, определит таблицу возможных значений остальных букв.

Помогают соображения о возможной последней цифре произведения: $7 \cdot 9 = \dots 3$, $24 \cdot 32 = \dots 68$, и т.п. В случае $N \cdot N \rightarrow \dots M$ число $M = 1$ или 4, или 6, или 9, но не 0 или 5, так как в этом случае было бы $M = N$, что недопустимо: разные буквы должны иметь разные значения.

Решишь задачи алфаметики —
Постигнешь тайны арифметики!

И это — интригующе-увлекательное занятие: раскрытие тайны дедуктивным методом, то есть построением логической цепочки умозаключений. Не менее увлекательно и придумывание таких задач.

Вот на днях в кондитерской

+ БУЛОК
+ БЫЛО
МНОГО

Приятное, конечно, сообщение, но ребус обесценен тем, что «БУЛОК» действительно «МНОГО», то есть ребус допускает много пригодных расшифровок. Например,

$$\begin{array}{r} + 86230 \\ \underline{8123} \\ 94353 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 64320 \\ \underline{6932} \\ 71252 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 58210 \\ \underline{5921} \\ 64131 \end{array}$$

Не будем все же отказываться от вкусных булочек, — пусть всегда их будет много, но множественность решений ребуса не украшает его. Введем добавочное условие: под каждой буквой слова БЫЛО прячется простое число.

Теперь «много» — это только одно, единственно возможное пятизначное число.

Докажите это самостоятельно или, если хотите, проследите за ходом наших рассуждений:

При сложении столбиком, имеем: $K + O = O$ (здесь O — буква). Такой результат может быть верным только в том случае, когда O — какая-либо цифра, отличная от нуля, а K равно нулю ($K = 0$). Буквами Б, Ы, Л, О зашифрованы цифры, выражающие простые числа. Однозначных простых чисел только четыре: 2, 3, 5 и 7.

Предположим, что $O = 7$. Тогда имеем:

$$\begin{array}{r} + \text{БУЛ7 0} \\ \underline{\text{БЫЛ7}} \\ \text{МН 7Г7} \end{array}$$

Предположим $Л = 5$. Тогда

$$\begin{array}{r} + \text{БУ 570} \\ \underline{\text{БЫ57}} \\ \text{МН 7Г7} \end{array}$$

Выполняя сложение, замечаем, что Ы должно быть равно 1, но 1 не является простым числом, значит, Л ≠ 5. Предположим Л = 3. Тогда

$$\begin{array}{r} + \text{БУ } 370 \\ \text{БЫ} \underline{37} \\ \text{МН } 7\text{Г}7 \end{array}$$

Получается, что Г = 0, но уже установлено, что К = 0, а две разные буквы не должны шифровать одну и ту же цифру, значит, Л ≠ 3. Пробуем Л = 2. Тогда

$$\begin{array}{r} + \text{БУ } 270 \\ \text{БЫ} \underline{27} \\ \text{МН } 7\text{Г}7 \end{array}$$

Выполняя сложение, получаем Г = 9, Ы = 5, Б = 3. Так как У + 3 должно быть больше 10 (в противном случае получилось бы Б = М, чего быть не должно), то У = 7 или 8 или 9. У = 7 отпадает (должно быть Н ≠ 0).

У = 8. Тогда Н = 1 и ответ:

$$\begin{array}{r} + 38270 \\ \underline{3527} \\ 41797 \end{array}$$

Рассуждая аналогично, покажите самостоятельно, что словом БЫЛО не могло бы быть зашифровано число, последняя цифра которого не 7, а 5, 3 или 2, откуда и будет следовать, что найденный ответ — единственный.

10. Расшифруйте пару бесспорно верных утверждений:

а) ЯЯЯ = ДА × МА;

б) ТРИ + ТРИ + ОДИН = СЕМЬ,

где число ТРИ, как и полагается делится на 3, а число СЕМЬ делится на 7.

Заметьте, что в этом ребусе использовано ровно 10 различных букв, прикрывающих, следовательно, все 10 цифр.

Исследуйте, одно ли решение у «завлекалки» 11?

$$11. \quad \begin{array}{r} + \text{ЗАДАЧА} \\ \text{АНАЛИЗ} \\ \hline \text{РЕШЕНИЕ} \end{array}$$

$$12. \quad \begin{array}{r} + \text{ПРИЕДУ} \\ \text{СРЕДУ} \\ \hline \text{ДИДУРА} \end{array}$$

(Сумма — наибольшая из возможных.) («СРЕДУ» — наименьшее из возможных чисел.)

$$13. \quad \begin{array}{r} + 1777 \\ \text{КАРЛ} \\ \hline \text{ГАУСС} \end{array} \quad \overline{УС} \text{ — простое число}$$

$$14. \quad \begin{array}{r} \overline{ЛШЧВ} : \overline{ЫШ} = \overline{ЧВ} \\ \overline{ЕЛЕ} + \overline{ЛА} = \overline{ЕЕП} \\ \hline \overline{ЛЕЛЛ} - \overline{ВЫЧ} = \overline{ЕЫВ} \end{array}$$

Расставьте буквы в порядке возрастания соответствующих им цифр, затем А замените на Е, — получатся инициалы и фамилия великого русского математика.

$$15. \quad \begin{array}{r} \overline{ЛЕА} - \overline{ГУ} = \overline{ЕАЛ} \\ : \quad + \\ \overline{Я} \times \overline{В} = \overline{РЛ} \\ \hline \overline{ЛР} + \overline{АМ} = \overline{ВК} \end{array}$$

Расставьте буквы в порядке возрастания соответствующих им цифр и все гласные буквы замените буквой О. Получится фамилия всемирно известного русского математика, академика, Героя Труда.

$$\begin{array}{rclcl}
 16. & \overline{MOA} & - & \overline{LEO} & = & \overline{PZE} \\
 & \begin{array}{c} \vdots \\ \overline{XP} \end{array} & \times & \begin{array}{c} + \\ M \end{array} & = & \overline{LMA} \\
 & \overline{LO} & + & \overline{LZL} & = & \overline{LIE}
 \end{array}$$

Из букв ребуса можно составить имя знаменитого узбекского математика, жившего более 1000 лет назад, тогда соответствующие буквам цифры составят возрастающую последовательность.

$$\begin{array}{r}
 17. \quad \times \text{ИНН} \\
 \quad \quad \underline{\text{ДОН}} \\
 \quad \quad * * * * \\
 \quad \quad \text{Р} * * \\
 \quad \quad \underline{* * \text{Е} *} \\
 \quad \quad * * * \text{КИ} *
 \end{array}$$

Звездочку заменяйте любой подходящей цифрой.

Ребус имеет единственное решение не только в десятичной системе счисления, но и в системе с основанием $b = 11$.

$$18. \text{ГОЛ} \cdot \text{ГОЛ} = \text{ФУТБОЛ}$$

$$\begin{array}{r}
 19. \quad \times * * * \\
 \quad \quad \underline{\text{ЛЕНА}} \\
 \quad \quad \text{ЛИЛЯ} \\
 \quad \quad \text{АЛЯ} \\
 \quad \quad \text{ГАЛЯ} \\
 \quad \quad \underline{\text{ВАЛЯ}} \\
 \quad \quad * * * * * * *
 \end{array}$$

$$20. \frac{\text{СОРОК}}{40} = \text{ОДИН}$$

4. Кто-то, как нарочно, ставит нам препоны. Но нас это только подзадоривает к преодолению их. Я прав, надеюсь?

Разделите пополам вновь заданный отрезок, пользуясь циркулем и линейкой. А препона — в требовании: все построение выполнить по одну сторону отрезка.

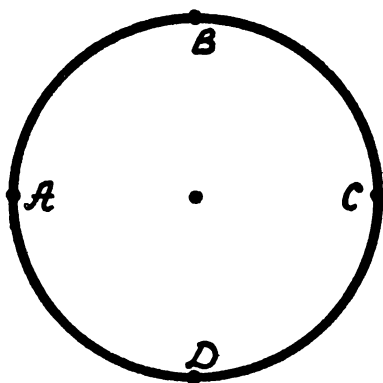
БУДТО ВИТАМИН!

Какая же прелесть эти головоломки «на построение», настоящий витамин для геометрического мышления!

Помню как-то профессор сказал: «Если вы найдете способ отметить на окружности, с помощью только циркуля, 4 точки, являющиеся вершинами воображаемого вписанного квадрата (например, точки *A*, *B*, *C*, *D* на рисунке), то легко сообразите, как после этого разделить окружность на 12 равных дуг, также только циркулем.»

Быстрее всех придумала построение, притом короткое, изящное, студентка Маслова — нет, не Катюша Маслова из «Воскресенья», а наша талантливая однокурсница — Тамара Маслова.

Головоломка не из легких, но, надеюсь, и вам сверкнет конструкторской догадки луч! Сравните свое решение с нашим.



С ОЩУЩЕНИЕМ ВОЛШЕБСТВА

Не знаю как вас, а меня всегда охватывает восторг и ощущение волшебства, когда результат какого-то, зачастую немудреного, арифметического действия над числами неожиданно и остроумно интерпретируется (моделируется) как решение некоторой конструктивной задачи.

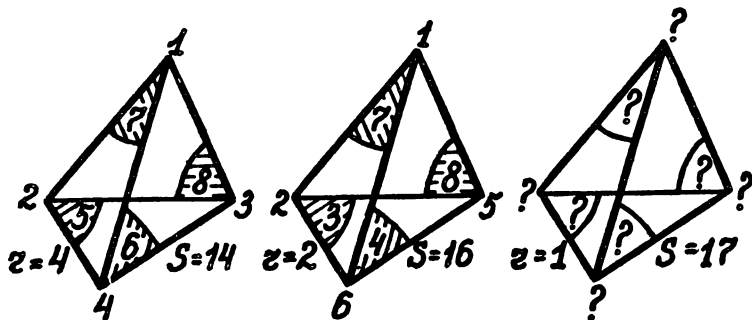
Волшебство вычитания. Восемь натуральных чисел из промежутка $[1; 8]$ требуется расположить парами в 4 столбика так, чтобы в каждом столбике разность чисел была одной и той же.

Есть только 3 способа такой группировки. Вот два из них:

1	2	3	4	1	2	5	6
5	6	7	8	3	4	7	8
Разность $r = 4$				$r = 2$			

Сформируйте третью группировку с разностью $r = 1$.

К моему, надеюсь и вашему, восторгу, каждая из этих трех группировок являет собой своеобразную программу конструирования «магического» тетраэдра — правильного четырехгранника — истинного кристалла в семействе пирамид. Программа размещений чисел единообразна для всех трех группировок: четыре числа верхнего (или нижнего) ряда расположить в вершинах тетраэдра, а их партнеров в столбиках — на гранях, противоположных соответствующим вершинам (см. рис.).



«Магическая» сумма (S) — одна и та же для каждой треугольной грани тетраэдра — образуется от сложения четырех чисел, принадлежащих этой грани.

Для тетраэдров первой группы (с разностью $r = 4$) $S = 14$, второй группы ($r = 2$) — $S = 16$ и третьей ($r = 1$; их вам надлежит еще построить) — $S = 17$. И заключительный аккорд: для всех «магических» тетраэдров сумма $S + r$ равна 18.

Вопрос для любознательных: сколько различных «магических» тетраэдров можно сформировать из заданных восьми чисел?

Волшебство сложения. К числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, расположенным в возрастающем и убывающем порядке, припишите слагаемыми некоторую последовательность этих же чисел так, чтобы все суммы в каждой группе чисел получились различными.

Эту арифметическую задачу придумал великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777 — 1855). Для чего «королю математиков» (так величали Гаусса) понадобилось придумывать такую простенькую задачу, узнаете позже.

Вариантов решения задачи Гаусса много — значительно больше полусотни (все-таки сколько же точно?).

Вот один из них:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1	(*)
3, 5, 2, 8, 1, 7, 4, 6	3, 5, 2, 8, 1, 7, 4, 6	
4, 7, 5, 12, 6, 13, 11, 14	11, 12, 8, 13, 5, 10, 6, 7	

Волшебство же здесь в том, что восемь подобранных чисел (3, 5, 2, 8, 1, 7, 4, 6) это — не просто восемь найденных слагаемых, это — номера строк шахматной доски, в которых, переходя последовательно от столбца к столбцу той же шахматной доски, следует разместить восемь ферзей («королев») так, чтобы ни одна из этих шахматных фигур не находилась под ударом другой.

Расположение ферзей, соответствующее найденному решению, показано на рисунке на с. 339.

Интересна история возникновения волшебного арифметического аналога этой конструктивно-шахматной задаче.

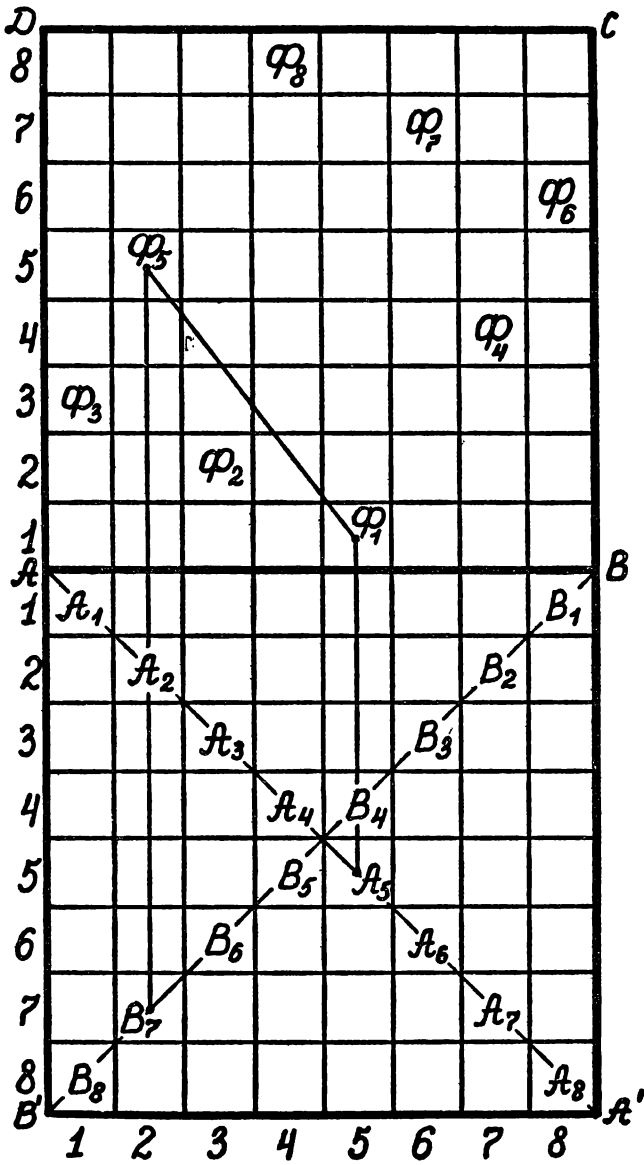
Задача о восьми ферзях (в те времена называвшихся «королевами»), контролирующих все поля шахматной доски, но не наносящих удара друг другу, известна любителям шахматной игры с 1848 года, когда впервые появилась публикация о ней на страницах одного немецкого журнала. Сразу же возник вопрос о числе возможных решений этой задачи о ферзях.

Первым откликнулся на поставленный вопрос некий доктор Нау́к, назвав число 60 в качестве ответа на вопрос.

Это число не явилось верным ответом! Но определилась эффективная стратегия выявления искомого числа. Пусть требуемая расстановка восьми ферзей на шахматной доске осуществлена. Поворачивая доску на 90° , 180° и 270° , мы получаем три новых конфигурации расположения ферзей, также являющихся решениями задачи. При помощи зеркального отображения каждого из этих четырех расположений можно получить еще четыре новых решения задачи. Таким образом, при помощи указанных преобразований, из одного решения можно получить восемь решений. Следовательно, задача редуцируется к некоторому первоначальному количеству основных решений, не сводимых одно к другому при помощи поворотов и зеркальных отображений.

Гаусс в письме к своему другу астроному Шумахеру (12.9.1850 г.) привел 9 основных решений, откуда следовало, что всех решений $9 \cdot 8 = 72$, но без ручательства, что невозможно большее число. И действительно, все тот же доктор Нау́к (слепой от рождения) публикует в журнале «*Illustrierte Zeitung*» число 92 — как окончательный ответ на поставленный вопрос. Выяснилось при этом, что задача имеет не 9, а 12 основных решений. Отсюда $12 \cdot 8 = 96$, но из них 4 решения оказываются совпадающими с другими.

Во втором письме к Шумахеру (27.9.1850 г.) Гаусс как раз и сообщает о придуманной им задаче «на сложение» в качестве остроумно-эффектной арифметической аналогии к задаче о восьми ферзях. Гаусс не пожелал, а может быть



не счел необходимым, раскрыть причину найденной им связи между решениями этих задач или хотя бы интерпретировать общедоступно эту связь.

Излагаемое далее одно из возможных истолкований таинственной связи между решениями столь разнородных задач — арифметической и конструктивно-шахматной мне кажется достаточно впечатляющим.

Но прежде напомним все-таки, что ферзь, занимая некоторую клетку шахматной доски, держит под ударом все клетки, расположенные в той же строке и в том же столбце, а также вдоль двух диагональных линий, проходящих через занятую клетку. Следовательно, условию задачи может удовлетворять только такое расположение восьми ферзей на шахматной доске, когда каждый столбец и строка клеток доски заняты только одной фигурой и при этом прямая, соединяющая центры клеток, занимаемых любыми двумя фигурами, не должна быть параллелью для той или другой диагонали доски.

Обратимся к интерпретации на шахматной доске арифметической задачи Гаусса. Пусть числа $1 — 8$ и $8 — 1$ заданных последовательностей (*) обозначают соответственно номера строк клеток шахматной доски $ABCD$ (рис. на с. 339). Поставим в соответствие каждому из чисел $1 — 8$ точку A_i на диагонали AA' вспомогательной доски $ABA'B'$ (i — номер столбца и число клеток в этом столбце от начальной линии AB до точки A_i , считая и ту клетку, в которой находится эта точка) и каждому из чисел $8 — 1$ второй последовательности — точку B_{9-i} на диагонали BB' (i — номер столбца, а $9 - i$ — число клеток в этом столбце от начальной линии AB до точки B_{9-i} , считая и ту клетку, в которой находится эта точка). Каждое из чисел решения (вторые строки в решении задачи Гаусса на с. 337), как упоминалось, показывают номер строки, в которой должна быть помещена фигура в соответствующем столбце, или иначе, число клеток в соответствующем столбце от начальной линии AB до клетки, занятой фигурой, считая и эту клетку. На рисунке на с. 339 такому числу i соответствует точка Φ_j (j — номер строки). Суммы чисел-индексов точек A_i и Φ_j , таким образом, изображаются отрезками $A_i\Phi_j$, а

суммы чисел-индексов точек B_j и Φ_j изображаются отрезками $B_j - \Phi_j$.

Теперь становится наглядным требование Гаусса о несовпадении никакой пары сумм первой группы и никакой пары сумм второй группы, так как в противном случае отрезок, соединяющий центры соответствующих клеток, занятых ферзями (Φ), был бы параллелен какой-либо из диагоналей доски.

Если бы, например, были равны суммы чисел второго и пятого столбцов (см. с. 337), то мы имели бы $A_2\Phi_5 = A_5\Phi_1$, а так как, кроме того, $A_2\Phi_5 \parallel A_5\Phi_1$, то четырехугольник $A_2\Phi_5\Phi_1A_5$ был бы параллелограммом и $\Phi_5\Phi_1 \parallel A_2A_5$. Если бы были равны суммы чисел второго и пятого столбцов второй группы решения, то аналогично четырехугольник $B_7\Phi_5\Phi_1B_4$ был бы параллелограммом и $\Phi_5\Phi_1 \parallel B_7B_4$. Такое расположение ферзей не годилось бы в качестве решения задачи.



ЭТО БЫЛО ТАК.. (Три ретро-замечания)

1. Полагают, что десятичные дроби и десятичную систему мер первым ввел в употребление голландец Симон Стевин, опубликовавший книгу «Десятина» (1585 г.). Для Европы это, видимо, так. Но атрибутом мировой культуры десятичные дроби стали на полтора столетия раньше — через книгу «Ключ к арифметике» (1427 г.), содержащую теорию и практику десятичных дробей, написанную самаркандским ученым Ал-Каши. Для отделения дробной части от целой Ал-Каши пользовался чернилами разного цвета, вертикальной чертой, надписыванием над цифрами названия разрядов.

Запятую для отделения целой части от дробной предложил первым не Непер, как принято считать, а итальянский астроном Маджини в 1592 г.; чуть позже — Иоганн Кеплер. В 1593 г. Кристофер Клавий (Клавиус) для этой цели предложил точку. Такой способ записи и теперь применяется в США (3,14 записывают как 3.14, вместо 0,4 пишут .4).

2. Появившиеся знаки сложения и вычитания в XV в. и знак равенства в XVI в. стали общепризнанными лишь в конце XVII в.

Знаки умножения в виде точки и деления — двоеточия введены не Лейбницем, как обычно полагают, а раньше: точка появляется у Региомонтана (псевдоним Иоганна Мюллера, XV в.), затем у Харриота (1631 г.), двоеточие — у Джонсона (1633 г.).

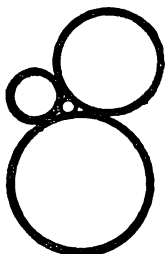
3. Знак радикала появляется в 1525 г. у К. Рудольфа в виде $\sqrt{}$. Только в 1637 г. Рене Декарт соединил с этим знаком горизонтальную надрадикальную черту.

ПОЦЕЛУЙ ПО РАСЧЕТУ

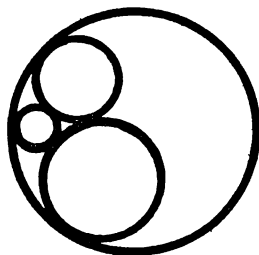
Английский ученый-химик Фредерик Содди, получивший Нобелевскую премию за открытие изотопов, опубликовал в журнале «Нейчур» (1936) стихотворение «The Kiss Precise» — «Поцелуй по расчету» (в вольном переводе), состоящее из трех стансов. В книге Карла Левитина «Геометрическая рапсодия» («Знание», 1984) воспроизведен перевод первого станса этого стихотворения:

Когда к устам прильнут уста,
Быть может голова пуста.
Но если вдруг четыре круга
Решат поцеловать друг друга,
То лишь геометра расчет
Их к поцелую приведет.
Вариантов два, любой не плох:
Все три в одном, один средь трех.
Коль три в одном, то изнутри
К гиганту тянутся они.
Но и средь трех он рад вполне:
Три поцелуя — все извне.

Образным языком стиха Содди изложил содержание классической задачи о построении окружности, касающейся данных трех соприкасающихся (задача Аполлония).



*Первый
вариант*



*Второй
вариант*

Но возбудителем поэтического порыва послужило для ученого его собственное открытие необычайно стройной, величавой формулы, изящно связывающей радиусы (r_1 , r_2 , r_3 , r_4) этих четырех окружностей:

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)^2 = 2 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2}\right).$$

Ей Содди посвятил второй станс своей «лирической» поэмы:

Четыре круга как-то раз
Поцеловались в поздний час.
Евклид об этом не узнал:
Он о любви не думал,
А я круги нарисовал
И формулу придумал:

*«Сумма квадратов всех искривлений
Равна половине квадрата суммы этих искривлений»*

Поясню: «искривление» («кривизна») окружности это — число, обратное ее радиусу ($k = \frac{1}{r}$).

И еще: вычисляя радиус искомого, четвертого круга (r_4) по формуле Содди (как позже выяснилось, она была известна еще Рене Декарту), приходится решать квадратное уравнение; оба его корня (с заменой минуса на плюс) определяют искомый радиус: один — для внутреннего касания, второй — для внешнего.

Известный мне вывод этой формулы Содди все-таки довольно громоздок. Попробуйте-ка, истинные «рыцари геометрии», пойти собственным путем.



В третьем стансе Содди перебрасывает свою поэтическую мысль в трехмерный мир, где целоваться (касаться) в той же манере могут лишь пять сфер. Соответствующая формула и тут не менее эффектна:

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5}\right)^2 = 3 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} + \frac{1}{r_5^2}\right).$$

В английском двестишии эта формула звучит так:

*The square of the sum of all five bends
Is thrice the sum of their squares.*

ИЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФАНТАСТИКИ

Всем хорошо известна мудрая сказка Гете о драматических последствиях общения человека — Фауста с античеловеком — Мефистофелем, — пришельцем из антимира, возможно, из того самого, о котором толкуют ученые-физики. В таком антимире, надо полагать, что, например, результатом измерения линейной величины является число антиположительное, значит, — отрицательное. Выходит, что там и объем куба отрицателен?! И вдруг бы вот такой антикуб, подобно Мефистофелю, явился в наш мир, вступив в общение с его близнецом-кубом?! Что было бы? Здесь нужен новый всплеск фантазии, для воплощения которой что лучше может быть стиха?!

Дж. А. Линдон
**О ТОМ, КАК ПЛОТНИКУ ЧАРЛИ
ПОЛОЖИТЕЛЬНО НЕ ПОВЕЗЛО**

Жил плотник Чарли Бреттиксон,
Был к алгебре пристрастен он.
И выпилил однажды днем
Куб с отрицательным ребром.

Да, есть над чем подумать тут:
Ребро длиною в минус фут!
Идея здесь весьма остра:
Ничто (т.е. 0) на фут длинней ребра!
Получим, оценивши грубо,
Фут в кубе мы в объеме куба,
Но также минус перед ним
Мы в результате сохраним.
Шесть раз (чему он был не рад)
Наш Чарли спиливал квадрат,
И весь вспотел, поскольку был
Плюс фут в квадрате — каждый спил!
Затем он сделал куб иной —
С ребром уже плюс фут длиной:
Объем (всем ясно, кто не туп)
Плюс в кубе фут имел тот куб.
Так создал он, в конце концов,
Два куба — братьев близнецов,
И, увлечен своей игрой,
Он в первый куб вложил второй!
И... плюс на минус дал ничто:
Остались плоскости, зато
Объемы сгнули тотчас,
Взаимно уничтожась!
Исчезли ребра в тот же миг,
И перед ним предмет возник,
Двойной в размере плоскостном,
Но где длина? И где объем?
Хотя он выпилил из дуба
Два крепких и здоровых куба —
Они слились в предмет, похожий
На кубик из тончайшей кожи,
Двенадцати квадратных футов,
И он, все планы Чарли спутав,
Стоит в углу — и как с ним быть?
И для чего употребить?

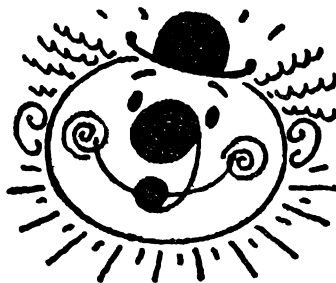
Перевод с английского Виктор Фет

ПАРА ШУТЛИВЫХ РЕПЛИК

Семейный круг не очертишь циркулем.

Даже самый плоский человек, к сожалению, существует в трех измерениях.

Станислав Ежи Лец «Непричесанные мысли»



РЕШЕНИЯ

ПИФАГОРЕЙСКИЙ КРУГ

Вычисляем: $S = 2(1 + 2 + \dots + (n - 1)) + n$. Выражение в скобке равно $\frac{(n-1)n}{2}$, следовательно,

$$S = (n - 1)n + n, \text{ то есть } S = n^2.$$

БОГОМ ДАННЫЕ ПРИВИЛЕГИИ ЧИСЛУ 7

1. Имеем: $\overline{aba} = 101a + 10b$ и $a + b = 7k$, $k \in N$. Тогда $\overline{aba} = 101a + 10(7k - a) = 91a + 70k = 7 \cdot (13a + 10k)$ — делится на 7. Для делимости на 7 чисел вида \overline{baa} и \overline{aab} доказательство аналогичное.

Пусть $A = \overline{abcdef}$ — какое угодно шестизначное число, кратное числу 7. Представим его в виде $A = 10x + y$. Тогда число $B = \overline{fabcde}$, образовавшееся перенесением последней цифры в начало, принимает вид $B = 100000y + x$. По условию A делится на 7, поэтому делится на 7 и число $A - 7x = 10x + y - 7x = 3x + y$. Образует число $3B$ и представим его в виде $3B = 300000y + 3x = 299999y + (3x + y) = 7 \cdot 42857y + (3x + y)$ — делится на 7. Заключаем: поскольку $3B$ кратно числу 7, то и $B = \overline{fabcde}$ — делится на 7.

Разложив $n(n^6 - 1)$ на множители, получим: $n(n^6 - 1) = n(n - 1)(n^2 + n + 1) \cdot (n + 1)(n^2 - n + 1)$. При $n = 7k$ и $7k \pm 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, делятся на 7 сомножители n или $n \mp 1$; при $n = 7k + 2$ и $7k + 4$ делится на 7 множитель $n^2 + n + 1$; при $n = 7k + 3$ и $7k + 5$ — множитель $n^2 - n + 1$.

2. Определяем магическую сумму: $S = 307 + 337 + 367 = 1011$. Вычитая из S сумму $(307 + 97)$, находим число 607 для пустой ячейки первой строки магического квадрата. Аналогично: $S - (307 + 577) = 127$ — для пустой ячейки первого столбца. Еще два искоемых числа: 547 и 67.

3. Последняя цифра 7. Цифра десятков искомого числа это — цифра единиц в произведении $7 \cdot 7 = 49$, то есть цифра 9. Цифра сотен искомого числа это — цифра единиц в сумме $7 \cdot 9 + 4 = 67$, то есть 7. Четвертая цифра от конца искомого числа — 5, так как $7 \cdot 7 + 6 = 55$. Пятая — 0, так как $7 \cdot 5 + 5 = 40$, и т.д. до возникновения суммы 01.

Таков естественный алгоритм формирования искомого числа:

1014492753623188405797 — 22 цифры.

4. Если 7 — последняя цифра числа $\frac{n(3n-1)}{2}$, то число $n(3n-1)$ должно оканчиваться цифрой 4, и это возможно, например, при $n = 9$. Также искомое треугольное число: $T = \frac{9(27-1)}{2} = 117$.

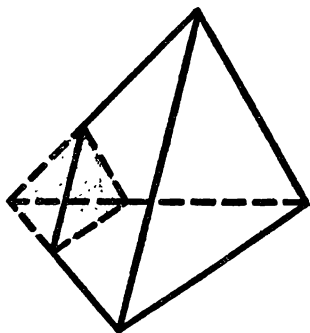
5. Если 7 — последняя цифра числа $\frac{n(n+1)}{2}$, то число $n(n+1)$ оканчивалась бы цифрой 4, что невозможно ни при каком значении n , в чем легко убедиться непосредственным перебором значений $n = 1, 2, \dots, 8, 9$.

— Последняя цифра всякого «квадратного» числа (n^2): 0, или 1, или 4, или 5, или 6, или 9. Как видим, «квадратное» число отвергает цифру 7 в качестве последней.

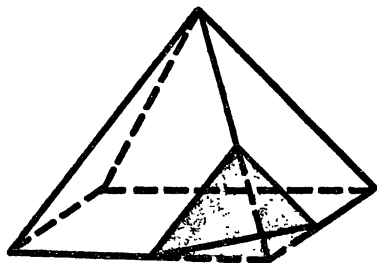
— Простой перебор значений $n = 1, 2, 3, \dots, 8, 9$ показывает, что для «шестиугольного» числа $n(2n-1)$ цифре 7 никогда не быть последней.



6. Если все грани — треугольники, то число всех ребер должно быть кратно 3, а 7 не делится на 3. Если же хотя бы у одной грани число вершин больше трех, то число всех ребер $2n$, то есть 8, 10, 12, ... Если отсечем уголок от пирамиды (см. рис.), то ребер станет $2n + 3$, то есть 9, 11, 13, Значит, действительно возможен многогранник с любым числом ребер $n > 7$.



а)



б)

7. По условию число СЕМБ — всякая перестановка цифр 2, 3, 5 и 7, например, 2357, 5273, Из 24 возможных комбинаций ровно 21 окажутся не кратными числу 7. (Убедитесь!)

ЗАВЕЩАНИЕ МАГАРАДЖИ

Пусть x — число сыновей. По условию последний сын получил x алмазов и ничего не осталось. Так как все x сыновей получили поровну, то есть по x алмазов каждый, то всего унаследовано x^2 алмазов. Первый сын получил $1 + \frac{x^2 - 1}{7}$ алмазов. Из уравнения $1 + \frac{x^2 - 1}{7} = x$ находим $x = 6$ (второй корень, $x = 1$ нереален). Интересно, что если в условии задачи число $\frac{1}{7}$ заменить на $\frac{1}{n}$, то решением уравнения $1 + \frac{x^2 - 1}{n} = x$ будет $x = n - 1$.

ЗАДАЧА-ЛЕГЕНДА

Слона поставили на большой плот и отметили уровень, до которого плот погрузился в воду. Потом слона сняли с плота и стали нагружать плот слитками золота — до тех пор, пока плот не погрузился до прежнего уровня. В этом положении вес плота с золотом сравнялся с весом плота со слоном и, значит, золото весило столько же, сколько слон.

**«ДАЙТЕ МНЕ ТОЧКУ ОПОРЫ —
И Я СДВИНУ ЗЕМЛЮ»**

$$10^{18} : 300000 = \frac{10^{18}}{3} (\text{с}) = \frac{10^{18}}{3 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365} \approx 100000 \text{ лет!}$$

СЮРПРИЗЫ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Сюрприз третий:

$$\begin{aligned} 4^2 + 5^2 + 6^2 &= 77 \quad (d=1), \\ 16^2 + 31^2 + 46^2 &= 3333 \quad (d=15). \end{aligned}$$

Если обе части равенства $11^2 + \dots + 15^2 + 16^2 = 1111$ умножим на 4 и на 9, то моментально образуются еще два решения уравнения:

$$\begin{aligned} 22^2 + 24^2 + 26^2 + 28^2 + 30^2 + 32^2 &= 4444 \quad \text{и} \\ 33^2 + 36^2 + 39^2 + 42^2 + 45^2 + 48^2 &= 9999. \end{aligned}$$



МАГИЧЕСКАЯ СИЛА ЕДИНИЦЫ

Берем два произвольных натуральных числа a и b ; полагая $z = a^n + b^n$, $x = z \cdot a$, $y = z \cdot b$, получаем:

$$x^n + y^n = (a^n + b^n) \cdot z^n = z \cdot z^n = z^{n+1}.$$

ГРУЗИНСКИЕ КОЗЫ И РУССКИЕ ОВЦЫ

1. Двум братьям — по 5 коз с тремя козлятами и по 5 коз с одним козленком, третьему — 10 коз с двумя козлятами.

2. Ответ: 2 рубля. Элегантное решение предложено академиком Гнеденко Б.В.

Из условия задачи ясно, что сумма, полученная за овец, содержит нечетное число десятков. Посмотрим, в каких случаях это возможно. Пусть $n = 10k + l$ — первоначальное число овец, бывшее у братьев. Сумма, полученная за них, по условию равна $S = (10k + l)^2 = 20(5k^2 + kl) + l^2$.

Мы делаем отсюда вывод, что нечетность числа десятков в полученной сумме определяется исключительно значением l^2 , а k никакой роли при этом не играет.

Запишем равенства:

$$\begin{aligned} 0^2 &= 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, \\ 5^2 &= 25, 6^2 = 36, 7^2 = 49, 8^2 = 64, 9^2 = 81. \end{aligned}$$

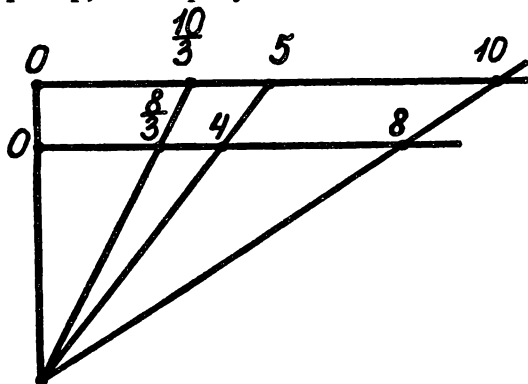
Замечаем, что нечетное число десятков может быть только в двух случаях: при $l = 4$ или $l = 6$. В обоих случаях l^2 заканчивается на 6. Значит, Андрей взял десятку, а брату отдал 6 рублей и свой нож, который стоит x рублей. Таким образом, фактически Андрей получил $(10 - x)$ рублей, а его брат Еремей — $(6 + x)$ рублей (помимо одинакового числа десятков).

Таким образом, должно быть $10 - x = 6 + x$, откуда следует, что $x = 2$.

ВЕНЕЦИАНСКАЯ ШУТКА С МАТЕМАТИЧЕСКИМ СМЫСЛОМ (XVI в.)

$\frac{1}{4} \cdot 20$ равно 4, а не 5, очевидно, за счет изменения единицы масштаба ($5 \cdot \frac{4}{5}$) = 4. При новой масштабной единице $\frac{1}{3} \cdot 10$ равно не $\frac{10}{3}$, а $\frac{10}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{3}$.

Геометрической интерпретацией решения является, например, такой рисунок:



СТАРИННАЯ КИТАЙСКАЯ ЗАДАЧА

Поперечник города — это диаметр d окружности O (рис. на с. 354). Примем 300 шагов за единицу длины, тогда $BC = 3$, $AO = 1 + \frac{d}{2}$, $BD = 3$, $OD = \frac{d}{2}$ и из треугольника AOD :

$$AD^2 = AO^2 - OD^2 = \left(1 + \frac{d}{2}\right)^2 - \frac{d^2}{4}, \text{ то есть}$$

$$AD^2 = 1 + d. \quad (1)$$

Из треугольника ABC : $(AD + 3)^2 = (1 + d)^2 + 3^2$, то есть

$$AD^2 + 6AD = (1 + d)^2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$AD^2 + 6AD = AD^4,$$

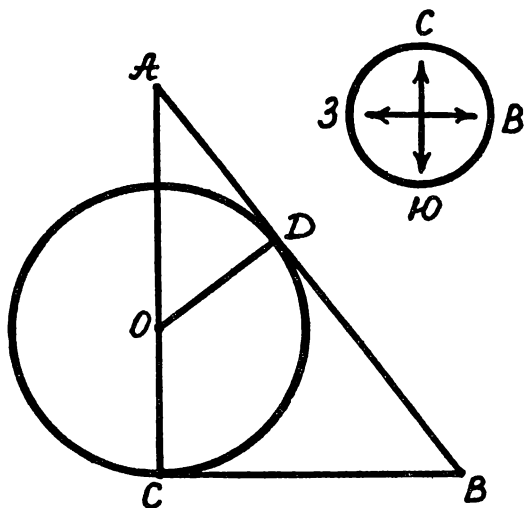
или

$$AD^3 - AD = 6. \quad (3)$$

Уравнение (3) — кубическое, но легко подбираем:

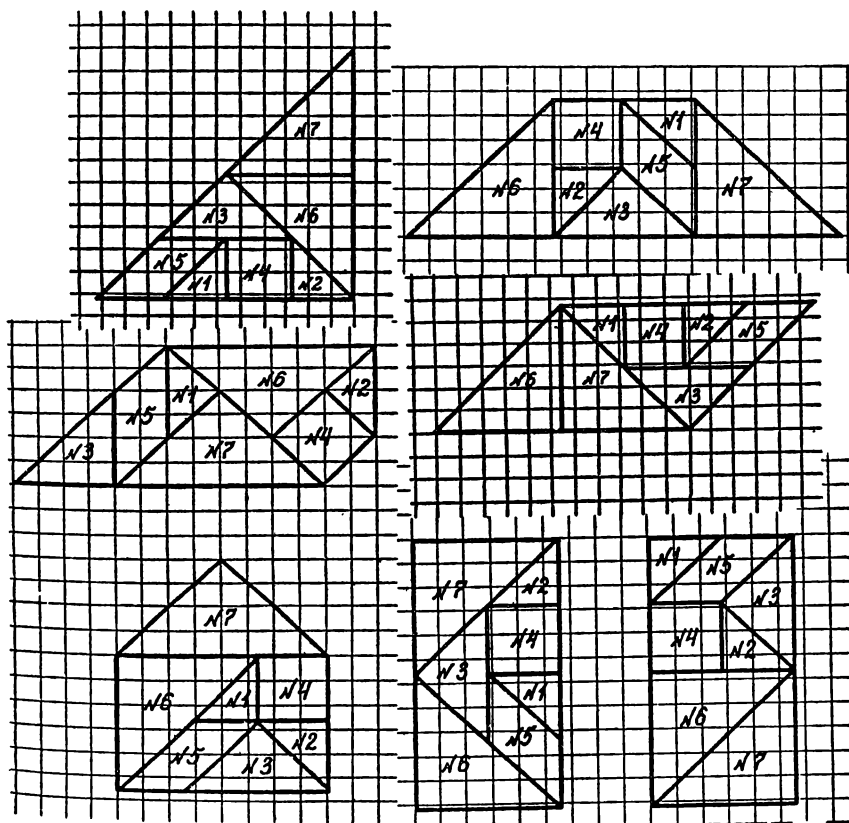
$$AD = 2.$$

Подставляя $AD = 2$ в уравнение (1), находим $d = 3$.
Поперечник города равен $3 \cdot 300 = 900$ шагов.

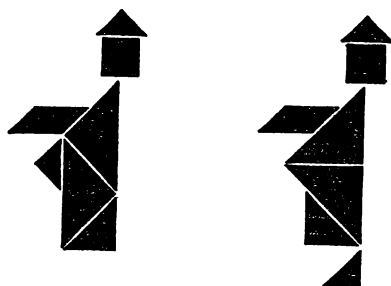
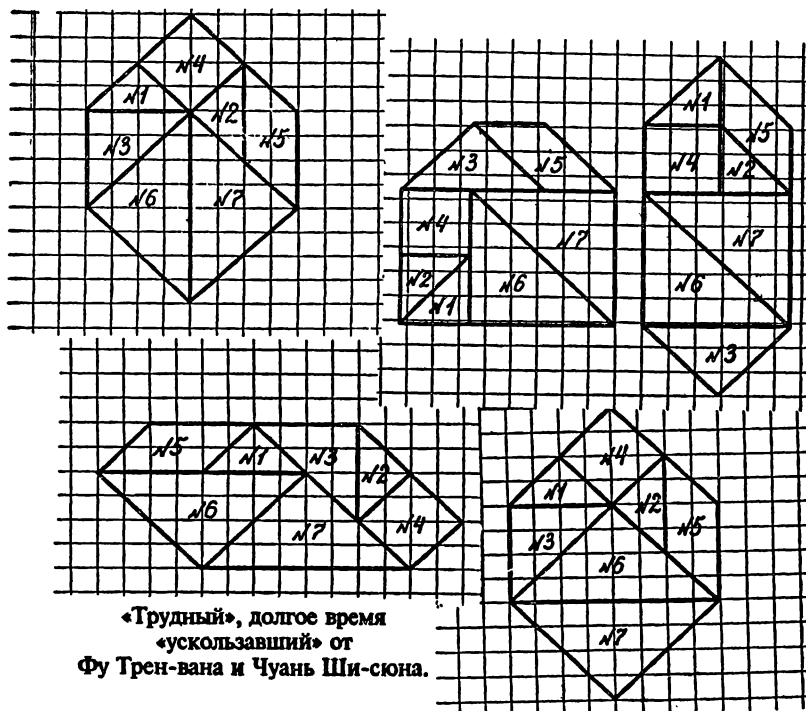


ШИ-ЧАО-ТЮ

Из семи «танов» удалось выложить (см. рис.): треугольник, и параллелограмм, трапецию, прямоугольник и пятиугольник (по два варианта); четыре вида выпуклых шестиугольников (см. рис. и на с. 356), в том числе и «трудный», долгое время «ускользавший» от Фу Трен-вана и Чуань Ши-сюна.



Еще один вид трапеции (прямоугольной) и силуэты формируйте самостоятельно. На рисунке представлена конструкция двух силуэтов человечка.



В СТАРИНУ И ТАК УМНОЖАЛИ НА РУСИ

Выпишем числа первого столбца и рядом с результатом каждого деления на 2 запишем соответствующий остаток:

38	
19	0
9	1
4	1
2	0
1	0
	1

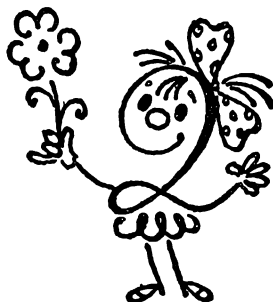
Столбец остатков дает последовательность цифр для записи числа 38 в двоичной системе:

$$38 = (100110)_2 = 2^5 + 2^2 + 2.$$

Теперь взглянем на числа второго столбца:

$$\begin{aligned} 267 &= 1 \cdot 267 \\ 534 &= 2 \cdot 267 \\ 1068 &= 2^2 \cdot 267 \\ 2136 &= 2^3 \cdot 267 \\ 4272 &= 2^4 \cdot 267 \\ 8544 &= 2^5 \cdot 267 \end{aligned}$$

Становится ясным, что результат сложения незачеркнутых чисел есть ни что иное, как произведение числа 267 на $(2^5 + 2^2 + 2)$, то есть на 38.



«ВОЛШЕБНАЯ КУВШИНКА»

На второй день кувшинка принимает размер двух кувшинок. Поэтому две кувшинки полностью покроют озеро за 9 дней. Четыре кувшинки — за 8 дней. Восемь кувшинок — за 7 дней. Шестнадцать кувшинок — за 6 дней.

«КРЕСТИКИ-НОЛИКИ» ПО ОВИДИЮ И ШЕКСПИРУ

Выиграет тот, кто делает ход первым, если первой же фишкой займет центральную точку.

Если игрок, начинающий передвижение фишек, не займет центральную точку, то это немедленно сделает второй игрок, но и в этом случае еще возможен ничейный результат.

КАК ЭТО ВОЗМОЖНО?

Девочки продавали самые крупные, хорошие апельсины по 15 лир за штуку, а остальные — по 5 лир за 7 штук.

Младшая имела 3 крупных, красивых апельсина, средняя сестра — 2, а старшая — только 1. Выручка у каждой:

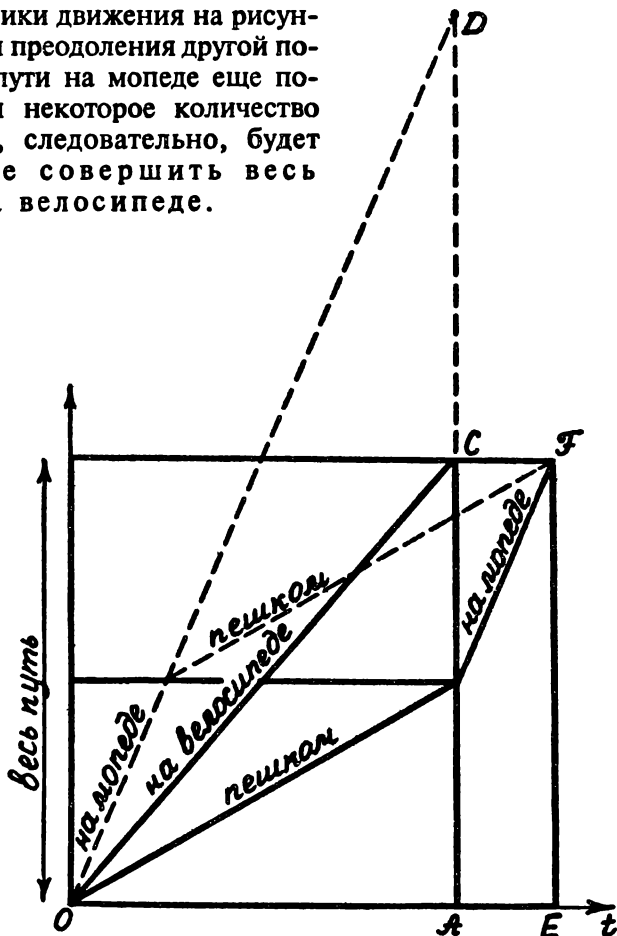
$$3 \cdot 15 + 5 = 2 \cdot 15 + 5 \cdot 4 = 1 \cdot 15 + 5 \cdot 7 = 50 \text{ лир.}$$

ФИЛОСОФСКАЯ ЗАГАДКА ВОЛЬТЕРА

Ответ: ВРЕМЯ.

А В РЕАЛЬНОЙ СИТУАЦИИ?

Для получения ответа на вопрос: «Как быстрее?» вычисления не нужны. Ведь за время пока идешь пешком половину пути, на велосипеде проедешь весь путь, так как скорость едущего на велосипеде вдвое больше (см. примерные графики движения на рисунке). А для преодоления другой половины пути на мопеде еще потребуется некоторое количество времени, следовательно, будет быстрее совершить весь путь на велосипеде.



ТОРГОВАЛИ — ВЕСЕЛИЛИСЬ, ПОДСЧИТАЛИ — ПРОСЛЕЗИЛИСЬ

Пусть было x купцов; каждый внес $100 \cdot x$ р. Весь капитал равен $100x^2$. Прибыль: $2x^3 = 2662$, откуда $x = 11$. Числа: 11, $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$ и $11^4 = 14641$ — палиндромические.

МЕЖДУ ПРОЧИМ...

При любом значении n справедливо равенство:

$$\underbrace{11 \dots 12}_{n \text{ единиц}} \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ единиц}} = \underbrace{11 \dots 11}_{n+1 \text{ единиц}} \underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ нулей}} + \underbrace{11 \dots 1}_{n+1 \text{ единиц}} =$$

$$= \underbrace{11 \dots 1}_{n+1 \text{ единиц}} \cdot (10^n + 1).$$

СУВЕНИР ИЗ ИНДИИ

Складывая почленно упорядоченные последовательности, получим 12 раз по 55:

$$\begin{array}{r} 03 \ 04 \ 12 \ \dots \ 50 \ 53 \\ \underline{52 \ 51 \ 43 \ \dots \ 05 \ 02} \\ 55 \ 55 \ 55 \ \dots \ 55 \ 55 \end{array}$$

СТАЯ ОБЕЗЬЯН (древнеиндийская задача)

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x, \text{ откуда } x = 16 \text{ или } x = 48.$$

ИМЕННЫЕ И БЕЗЫМЯНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

По условию строка под номером n состоит из n последовательных нечетных чисел, наименьшее из которых обозначено через a_n . Последний, наибольший член той же строки, обозначим через b_n . Очевидно, что зная a_n легко вычислить b_n , прибавляя к a_n число 2, повторенное $n - 1$ раз: $b_n = a_n + 2(n - 1)$.

Отсюда для $(n - 1)$ -й строки имеем:

$$b_{n-1} = a_{n-1} + 2(n - 2).$$

Из указанного в условии способа образования строк следует также, что $a_n = b_{n-1} + 2$. Заменяя в этом выражении b_{n-1} , получим $a_n = a_{n-1} + 2(n - 1)$ или $a_n - a_{n-1} = 2(n - 1)$.

В этой формуле будем полагать $n = 2, 3, \dots, n - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 2, \\ a_3 - a_2 &= 4, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= 2(n - 2), \\ a_n - a_{n-1} &= 2(n - 1). \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получаем:

$$a_n - a_1 = 2(1 + 2 + \dots + (n - 1)) = n(n - 1).$$

Отсюда $a_n = a_1 + n(n - 1) = n^2 - n + 1$.

Зная, что слагаемых в каждой строке n , а $d = 2$, легко убеждаемся в том, что сумма чисел в n -й строке равна n^3



АЛФАМЕТИКА — ЗАШИФРОВАННАЯ АРИФМЕТИКА

1. $125 \cdot 37$.
2. 1926.
3. $286 \cdot 826$.
4. $9567 + 1085$.
5. 138 — ответ дан автором задачи — Дьюдени; не исключено, что это число лишь одно из возможных.
6. $621 + 846 + 9071$.
7. $9635 + 546 + 185$.
8. $106 + 19722 + 82524$.
9. $807 \cdot 807 = 651249$ — исследуйте, нет ли и других решений.
10. а) $ЯЯЯ = Я \cdot 111 = Я \cdot 3 \cdot 37$. Положим $МА = 37$, тогда $ДА < 30$, кратно 3 и $А = 7$. Подходит только $ДА = 27$ и $27 \cdot 37 = 999$.
- б) $534 + 534 + 6842$.
11. $675797 + 707246$.
12. $532867 + 93867$.
13. Анализируя высшие разряды, заключаем: $\Gamma = 1$, $K = 9$, $A = 0$. Чтобы были одинаковыми последние две цифры результата сложения, в разряде единиц должен быть переход через десяток. Составим таблицу «версий»:

Л	С	Р
5	2	4
6	3	5
7	4	6

- В любой из этих «версий» $У = 8$.
 С учетом дополнительного условия имеем:
 $Л = 6$, $С = 3$, $Р = 5$.
 Окончательно: Карл = 9056, Гаусс = 10833.

14.

$$\begin{array}{rcl}
 1624 & : & 56 = 29 \\
 - & & \times \\
 313 & + & 17 = 330 \\
 \hline
 1311 & - & 952 = 359,
 \end{array}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 9
П.Л.ЧЕБЫШЕВ

15.

$$\begin{array}{rcl}
 216 & - & 54 = 162 \\
 : & & + \\
 8 & \times & 9 = 72 \\
 \hline
 27 & + & 63 = 90
 \end{array}$$

КОЛМОГОРОВ А.Н.

16. Узбекский математик

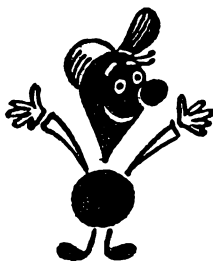
АЛХОРЕЗМИ
 $\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$
 0 23 4 5 67 89

От названия одной из его работ произошел термин АЛГЕБРА.

17. В десятичной системе счисления: $255 \cdot 835$. Если же основание системы $b = 11$, то: $344 \cdot 524$; здесь E — символ цифры 10.

18. Сразу можно предположить, что $\overline{ОЛ} = 25$, тогда $\overline{БОЛ} = 625$ и $\overline{ГОЛ} = 425$, $\overline{ФУТБОЛ} = 180625$.

19. $750 \cdot 5917 = 4437750$.



20. Сразу ясно, что $K = 0$. Сокращаем дробь на 10, теперь $\frac{COP0}{4} = \text{ОДИН}$. Четырехзначный результат (ОДИН) деления $\overline{COP0}$ на 4 означает, что $C \geq 4$, но $C \neq 4, 5, 6$ или 7, так как в этом случае первой цифрой результата (ОДИН) была бы единица. Но, если буква $O = 1$, то $\overline{COP0}$ — нечетное число — не разделилось бы на 4. Следовательно, $C = 8$ или $C = 9$ и буква $O = 2$.

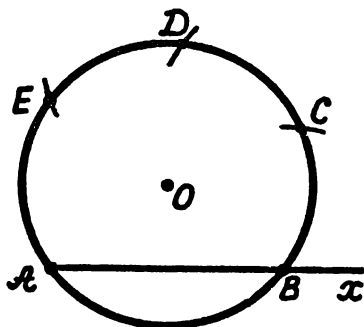
Если $C = 8$, то $\overline{82P2} : 4 = 20**$ и $D = 0$ — отпадает, так как уже установлено, что $K = 0$. По признаку делимости на 4, $\overline{P2}$ должно быть кратно 4. Возможные значения $P = 1, 3, 5, 7$ и 9. Пригодно только $P = 7$. Тогда $\frac{92720}{40} = 2318$.



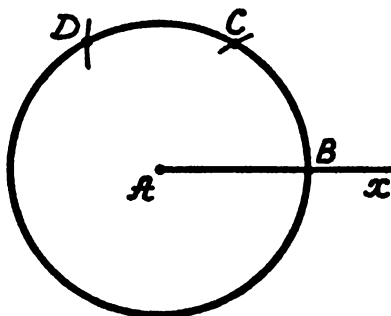
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КЛАССИКА

1. Доказательство. Вписанный угол CAB (см. рис. на с. 334), опирающийся на диаметр BC — прямой (90°), следовательно $AC \perp Ax$.

2. Первый вариант построения. Выбираем вне луча Ax произвольную точку O . Проводим окружность с центром в O и радиусом OA . Она пересечет луч Ax в точке B . Из B тем же раствором циркуля последовательно делаем засечки C, D, E . Точка E — искомая. Докажите!

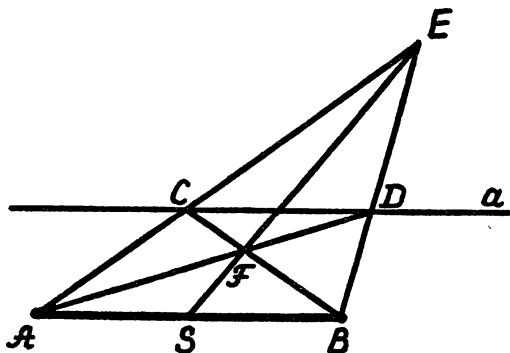


Второй вариант построения. Проводим окружность произвольного радиуса с центром в A (рис. внизу), и



тем же раствором циркуля делаем засечку C из точки B и — засечку D из точки C ; из точек C и D делаем засечки, образующие в пересечении точку E . Докажите, что точка E — искомая, то есть, что $\angle EAB = 90^\circ$!

3. На прямой a , параллельной отрезку AB (см. рис.), отметим две точки C и D , выбранные произвольно, но так,



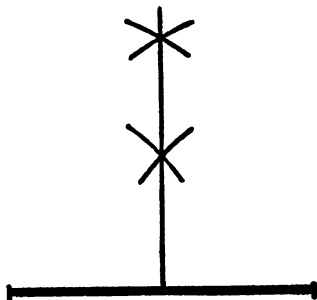
с прикидкой «на глаз», чтобы проведенные затем прямые AC и BD пересеклись в точке E , не слишком удаленной от отрезка AB .

Проведем отрезки AD и BC — диагонали образовавшейся трапеции $ABCD$. Пусть F — точка их пересечения. Проведем прямую EF до пересечения с AB в точке S .

Точка S — искомая середина отрезка AB .

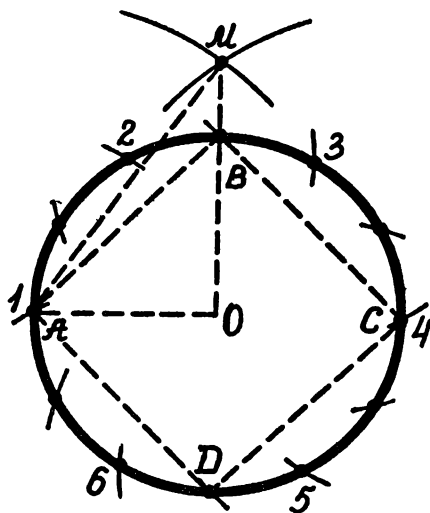
Разделим удовольствие: я предложил способ построения, а вы докажете его правильность.

4. Способ построения поймете по рисунку внизу. Завершите построение и докажете его правильность.



БУДТО ВИТАМИН

Произвольным радиусом, принимаемым за 1, строим окружность O (рис.) и тем же раствором циркуля делим окружность на 6 равных дуг. Раздвинем ножки циркуля на расстояние между отмеченными на окружности точками 1 — 3. Оно равно $\sqrt{3}$. Этим же раствором циркуля проведем дуги из каких-нибудь двух диаметрально противоположных точек, например, из точек 1 и 4.



Расстояние от точки M пересечения этих дуг до центра окружности O , $OM = \sqrt{2}$, как длина катета OM воображаемого прямоугольного треугольника $1OM$. Теперь, раство-

ром циркуля $MO = \sqrt{2}$, определяющим длину стороны квадрата, вписанного в окружность O , делаем на окружности O четыре засечки: A, B, C, D — искомые вершины квадрата.

Этим же раствором циркуля, OM , легко разделить пополам каждую из шести уже имеющихся дуг и выполнить таким образом деление окружности на 12 равных дуг с помощью одного циркуля (рис. на с. 367).





НЕОБЫЧНОЕ
В ОБЫЧНОМ

На то, что дважды два — четыре,
В научном мире смотрят шире.

И. Шаров

ПРИЧУДЫ КАЛЕНДАРЯ

1. Календарю некоторого года угодно было сформировать один месяц (а может быть и не один) так, что понедельников в этом месяце оказалось больше, чем вторников, а суббот меньше, чем воскресений.

Какой день недели был 5-го числа этого месяца? Мог ли этот месяц быть летним: июлем или августом?

2. Какой день недели был 5-го числа того месяца, в котором ТРИ воскресенья пришлись на четные числа?

ЧИСЛА-«САМОРОДКИ»

Возьмем произвольное натуральное число, например 13. Прибавим сумму его цифр, образуется число 17. К этому результату тоже прибавим сумму его цифр, образуется 25. Продолжая так действовать, получим последовательность чисел 13, 17, 25, 32, 37, 47, ...

Выясним, можно ли полученную последовательность продолжить влево, то есть существует ли натуральное число, которое в сумме с его же цифрами дало бы 13.

Пробуем 12; $12 + 3 = 15$ — плохо. Пробуем 11; $11 + 2 = 13$ — хорошо. Значит, перед числом 13 в нашей последовательности должно быть 11. А перед ним? Пробуем 10; $10 + 1 = 11$ — хорошо. А перед числом 10? Здесь и без пробы ясно, что числу 10 будет предшествовать 5. В самом деле, $5 + 5 = 10$. Но для числа 5 нет предшественника среди натуральных чисел.

Таким образом, в последовательности 5, 10, 11, 13, 17, 25, ... все числа, кроме пятерки, «сформированы» по единому правилу, а число 5 оказалось как бы «самородком».

Приглашаем любознательных отправиться в поиски других «самородков», аналогичных числу 5.

Однозначные «самородки» обнаруживаются сразу. Это, очевидно, 1, 3, 5, 7 и 9.

Из двузначных наименьшим «самородком» будет число 20 (легко убедиться непосредственно, что ни одно из чисел от 1 до 19 в сумме с его же цифрами не образует 20). Следующий двузначный «самородок» — число 31 (убедитесь!)

Задача. Еще какие двузначные числа являются «самородками»?

Есть коллекция «самородков» и среди многозначных чисел. Например. 143, 233, 929, 1952, 874531 и т.п. Не так-то легко было выявить их! Есть трехзначный «самородок» и меньший чем 143. Вытащите-ка его «на гора», как говорят шахтеры.



МОЖЕТ ЛИ БЫТЬ ТАКОЕ...

Чтобы сумма чисел равнялась сумме квадратов тех же чисел:

$$\begin{aligned} a + b &= a^2 + b^2, \\ a + b + c &= a^2 + b^2 + c^2, \\ a + b + c + d &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Равенства, действительно, выглядят интригующе, поскольку возведение в квадрат, и вообще умножение, психологически привычнее воспринимается как увеличение. Ясно, что для целых чисел эти равенства невозможны, но нет ли подходящих дробных чисел, ведь правильная дробь при умножении на себя становится еще меньше?

Оказывается, — есть, причем бесконечно много для каждого равенства указанного вида.

Примеры? — Пожалуйста:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} + \frac{6}{5} &= \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2, \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2, \\ \frac{3}{7} + \frac{6}{7} + \frac{7}{7} + \frac{9}{7} &= \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{7}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^2. \end{aligned}$$

Легко ли подобрать пригодные дроби? Попробуйте!

А затем, если хотите, сообщу по секрету забавный рецепт их изготовления, например, для четырех слагаемых: берете какие хотите 4 натуральных числа. Положим, взяли 1, 3, 4 и 7. Каждое умножаете на дробь $\frac{1+3+4+7}{1^2+3^2+4^2+7^2} = \frac{1}{5}$ и... продукция готова:

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{7}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2.$$

Рецепт действителен для любого желательного числа слагаемых.

Убедитесь!

А ЕЩЕ НАЙДЕТЕ?

Сколько вы можете изобрести чисел, каждое из которых есть среднее арифметическое его же цифр? Например, если число x (целое или дробное) содержит 3 цифры a, b, c , то должно быть: $x = \frac{a+b+c}{3}$.

В моей коллекции пока семь чисел с таким свойством. Вот одно: $\frac{10}{5} = \frac{1+0+5}{3}$.

Жду от вас пополнения этой необычайной коллекции. Для сравнения своих изобретений с моими, загляните на с. 401 этой книги.

КАКОВА СОВЕСТЬ У ВАС?

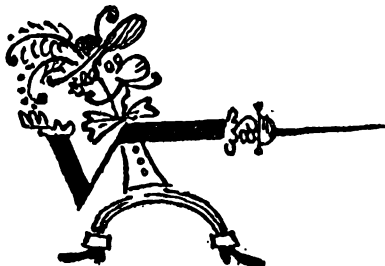
Возьмите карандаш
И напишите СОВЕСТЬ,
И вспомните, когда
Вы думали о ней?!

Из песни, услышанной по радио

Моя СОВЕСТЬ — число квадратное:

$$\begin{array}{ll} \text{СОВЕСТЬ} = 1028196 & (=1014^2) \\ \text{СОВЕСТЬ} & (\text{СОСИ}^2) \end{array}$$

А ваша? Надеюсь, она также — число квадратное, но при других значениях С, О, В и остальных букв?



НЕОБЫЧНАЯ МАНЕРА ПРИГЛАШЕНИЯ, И ВСЕ ЖЕ...

В городе проводился симпозиум врачей. От каждой поликлиники города были приглашены 4 врача. Каждый из приглашенных работал в двух поликлиниках и представлял на этом симпозиуме обе поликлиники. Однако любое возможное объединение двух поликлиник было представлено одним и только одним врачом. Сведения скудные, и все же их вполне достаточно чтобы определить, сколько поликлиник в городе и сколько врачей было приглашено на симпозиум.

ПРИМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Есть бесконечно много натуральных чисел, каждое из которых примечательно тем, что $\frac{1}{2}$ его — квадратное число, $\frac{1}{3}$ его — третья степень, $\frac{1}{5}$ его — пятая степень соответственных натуральных чисел.

Найдите наименьшее из этих примечательных чисел.

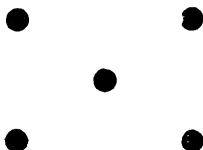
НЕОБЫЧНОЕ В ПРИВЫЧНОМ

Настолько привычно воспринимать линию, образующуюся при перегибании листа бумаги, как прямую, что на вопрос: «Почему такой сгиб непременно — прямая линия» — почти всегда отвечают так: «Линия сгиба листа бумаги — прямая, так как она есть линия пересечения двух плоскостей». Такое объяснение кажется естественным и верным, но это — заблуждение.

Попытайтесь сформировать правильное, полноценное обоснование и сверьте его с нашим, изложенным на с. 403 этой книги.

МАРШРУТ ЧЕРЕЗ 5 ТОЧЕК (Головоломка)

Следует проложить одним росчерком карандаша (то есть не отрываясь от бумаги). Маршрут должен состоять из четырех отрезков, образующих три треугольника так, чтобы каждому отрезку принадлежала хотя бы одна точка из пяти, показанных на рисунке.



СКРЫТАЯ ЭСТЕТИКА ШЕСТИЗНАЧНОГО ЧИСЛА

Вот оно: $n = \overline{(a)(a+1)(a+2)(a)(a+3)(a+4)}$ — в скобках его цифры.

На беглый взгляд, оно особо-то и не примечательно. Но сколько же внутренней красоты в нем затаилось при каком-то определенном значении его цифр! А именно:

— оно — биквадратное, то есть квадрат некоторого числа, которое, в свою очередь, также — точный квадрат ($n = x^2$, где $x = z^2$),

— оно — четвертая степень суммы его цифр,

— если разбить его на три грани по две цифры, то сумма образовавшихся трех двузначных чисел — точный квадрат,

— если написать его в обратном порядке следования цифр и вновь разбить на грани по две цифры, то сумма и этой тройки двузначных чисел окажется точным квадратом.

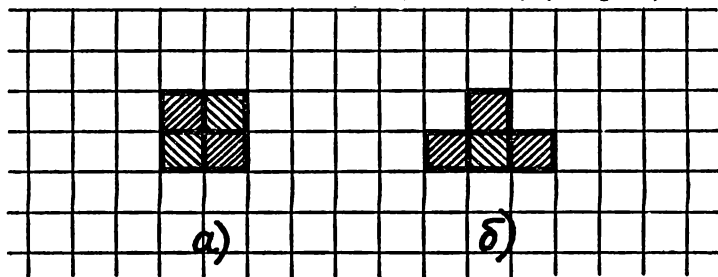
Вот сколько разных точных квадратов таится в недрах одного шестизначного числа! В этом его скрытая эстетика!

Испытывая возможные значения a найдите это интересное число n .

КЛЕТКИ-СОСЕДКИ

Клетки клетчатой бумаги назовем соседками, если у них есть общая сторона. У клетки может быть нечетное число соседок: одна, три, или — четное число соседок: две, четыре. Обведя, или закрасив какое-то определенное количество (n) клеток-соседок, можно образовать некоторую фигуру. Будет замечательно, если при этом у каждой клетки фигуры окажется четное количество соседок (фигура типа *a*) или у каждой клетки фигуры окажется нечетное количество соседок (фигура типа *b*).

Четыре клетки ($n = 4$) удалось без затруднений объединить в фигуру типа *a*) и в фигуру типа *b*) (см. рис.).



Наши усилия составить фигуры типов *a*) и *б*) из других четных количеств клеток-соседок ($n = 8, 10, 12, \dots$) также оказались успешными. А у вас получатся? Дерзайте!

КАПРИЗНЫЕ СОСЕДКИ (Продолжение)

Именно 6 клеток-соседок почему-то оказались капризными: не хотят, чтобы у каждой из них было четное количество соседок — тип *a*), а в фигурку типа *б*) объединяются охотно. Убедитесь!

Еще больше хлопот (значит и больше увлекательности) доставляют объединения нечетного количества клеток.

Меньше чем пятнадцати соседкам не удастся соединиться в фигуру с четным числом соседа у каждой клетки.

Составьте требуемую фигуру (тип а)) из 15 клеток.

Готово? Теперь сообразите, как ее «расширить» до любого нечетного $n > 15$: до 17, 19 и т.д. Но вот в фигуру, у которой каждая клетка имела бы нечетное число соседа (тип б)), невозможно объединить никакое нечетное количество клеток. Попробуйте это доказать!

«НЕ ВЕРЬ ГЛАЗАМ СВОИМ»

Учитель начертил на классной доске четырехугольник.

Янош сказал, что это — квадрат. Имре утверждал, что начерчена трапеция. Мария думала, что на доске изображен ромб. Эва назвала четырехугольник параллелограммом. Выслушав каждого и произведя необходимые измерения, учитель заявил:

— Ровно ТРИ из четырех утверждений истинны и ровно ОДНО утверждение ложно.

Соответствовать этому заявлению учителя может только одна из четырех фигур, названных учениками.

— Начерчен все-таки РОМБ, — правильно заключили венгерские школьники, сопоставив реплику учителя со своими определениями вида фигуры.

— Нет, — возразили русские школьники, — не ромб, а КВАДРАТ начертил учитель. Только в этом случае три ответа истинны: квадрат, он же ромб и параллелограмм, и один ответ — «трапеция» — ложный: так как квадрат — не трапеция.

— Вот те на! — теперь воскликнем мы. — Парадокс какой-то. Ведь углы начерченного учителем четырехугольника не могут быть одновременно прямыми, как у квадрата, и не прямыми, как у ромба.

Найдите объяснение возникновению двух противоречивых заключений о начерченной фигуре, вызванных одной и той же репликой учителя, и вам откроется еще один удивительный факт «необычного в обычном».

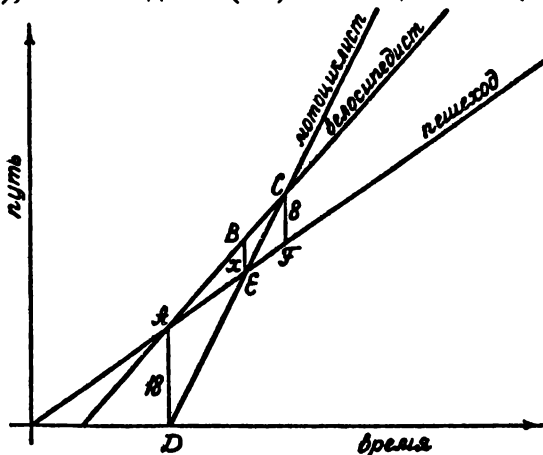
КАРТИНКИ РАВНОМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ...

...делают красивыми и упрощают решение задач, содержанием которых являются линейные зависимости между двумя величинами — равномерные процессы, если привлечете прямые линии в качестве графиков, моделирующих такие процессы. При этом нет нужды в составлении уравнения прямой линии, изображающей описываемый равномерный процесс, а для ее построения в соответствующей прямоугольной системе координат достаточно знать какие-либо два «состояния» (две точки), или даже одно — «начальное состояние», если проводимую прямую удобно понимать лишь как набросок предполагаемого графика.

В погоне за пешеходом. По одной дороге в одном направлении находятся в движении пешеход, велосипедист и мотоциклист, каждый с определенной постоянной скоростью. Когда велосипедист догнал пешехода, мотоциклист был позади на 18 км. Когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход был позади на 8 км.

На каком расстоянии от пешехода был велосипедист в тот момент, когда мотоциклист догнал пешехода?

Решение. Построим примерные графики движения пешехода (AF), велосипедиста (AC) и мотоциклиста (DC).



Тогда треугольники ADC и BEC подобны, откуда

$$\frac{18}{x} = \frac{DC}{EC} \text{ или } \frac{18-x}{x} = \frac{DE}{EC} \quad (1)$$

Треугольники ADE и CFE тоже подобны, откуда

$$\frac{DE}{EC} = \frac{9}{4}. \quad (2)$$

Сопоставляя (1) и (2), получаем

$$\frac{18-x}{x} = \frac{9}{4} \text{ или } \frac{18}{x} = \frac{13}{4}, \text{ откуда} \\ x = \frac{72}{13} \text{ (км)} — \text{ответ.}$$

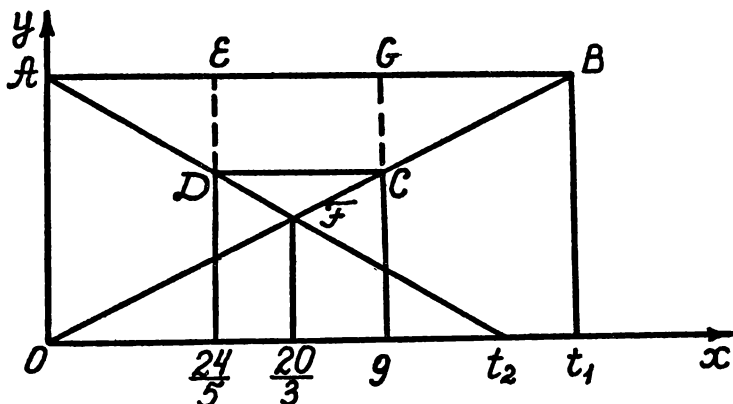
Создатели книжных корочек. Один переплетчик работал над выполнением заказа 9 ч чистого рабочего времени, после чего закончить работу было поручено другому переплетчику, который ее выполнил за 4 ч 48 мин. Если бы оба переплетчика работали вместе, они окончили бы переплетную работу за 6 ч 40 мин.

За какой промежуток времени смог бы выполнить всю работу каждый переплетчик отдельно?

Решение. В подобных задачах подразумевается пропорциональная зависимость между временем t и количеством (A) выполненной работы: $A = kt$, где коэффициентом k характеризуется производительность труда.

Удобен следующий прием описания содержания задачи языком графиков. Величину всего заказа изобразим на оси Oy отрезком OA произвольной длины (см. рис. на с. 380). Построим $AB \parallel Ox$ и произвольную прямую OB до пересечения с AB в точке B ; OB — примерный график количества продукции, вырабатываемой первым рабочим: абсцисса t точки B — *искомое время*. Отметим на оси Ox две точки $\left(\frac{24}{5}\right)$ и (9), представляющие два последовательных момента времени (в часах), то есть 4 ч 48 мин и 9 ч (соблюдение масштаба не требуется). На графике (OB) отмечаем точку C с абсциссой 9 (ордината точки C представляет количество продукции, выработанной первым переплетчиком за 9 ч работы в оди-

ночку). Отрезок GC (пунктир на рисунке) — часть всей работы, оставшейся на долю второго переплетчика. Так как второй переплетчик выполнил эту работу за 4 ч 48 мин $\left(\frac{24}{5}\right)$ ч, то найдем на прямой AB точку E с абсциссой $\frac{24}{5}$ и построим $ED = GC$ (второй пунктир на рисунке).



Определилась теперь прямая AD в качестве примерного графика количества работы, выполняемой вторым переплетчиком. (Этот график подразумевается отнесенным к системе координат с осями AB , AO , на которых установлены те же масштабы, что на осях Ox , Oy).

Точка t_2 пересечения AD и оси Ox — второе искомое. Абсцисса $\frac{20}{3}$ точки F пересечения графиков OB и AD — время (6 ч 40 мин) окончания переплетных работ при совместной работе.

Выделяя две пары подобных треугольников (пара с гипотенузами OC и OF и пара с гипотенузами Dt_2 и Ft_2), легко образуем одно уравнение для определения искомого t_2 :

$$9 : \frac{20}{3} = \frac{t_2 - \frac{24}{5}}{t_2 - \frac{20}{3}}, \text{ откуда } t_2 = 12 \text{ ч.}$$

Аналогично получаем еще одно уравнение для определения второго искомого t_1 :

$$t_1 : 9 = \frac{12}{12 - \frac{24}{5}}, \text{ откуда } t_1 = 15 \text{ ч.}$$

Замечание. Решение этой задачи без использования графиков обычно приводит к системе двух уравнений, каждое из которых содержит обе искомые величины.

Хотите испытать себя в сотворении такой же красоты? Пожалуйста:

Задача 1. Три свечи имеют одинаковую длину, но разную толщину. Первая свеча была зажжена на 1 ч раньше двух других, зажженных одновременно. В некоторый момент горения первая и третья свечи стали одинаковой длины, а через 2 ч после этого стали одинаковой длины первая и вторая свечи. За сколько часов сгорит первая свеча, если вторая сгорит за 12 ч, а третья — за 8 ч?

Задача 2. Два бегуна стартовали одновременно (первый из A в B , второй из B в A) и встречаются на расстоянии a м от A . Пробежав дорожку AB до конца, каждый из них поворачивает обратно, и они вновь встречаются на расстоянии b м от B . Найти длину беговой дорожки AB .

Замечание. Использование графиков простейшим образом «подскажет» нам, как избежать ошибки, часто допускаемой решающими эту задачу при выявлении обязательного соотношения между a и b , обеспечивающего существование решения задачи.

Свой ответ сравните с нашим (с. 406).

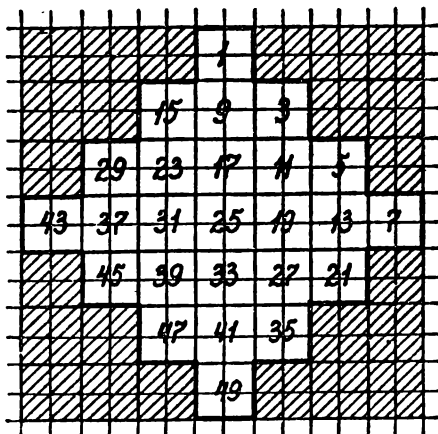
Задача 3. Три гонщика (A , потом B и затем C) стартуют с интервалом в 1 мин из одной точки кольцевого шоссе и двигаются в одном направлении с постоянными скоростями. Каждый гонщик затрачивает на круг более 2 мин. Сделав 3 круга, гонщик A в первый раз догоняет B у точки старта, а еще через 3 мин он вторично обгоняет C . Гонщик B впервые догнал C также у точки старта, закончив 4 круга.

Сколько минут тратит на круг гонщик A ?

Замечание. Пробуя разные подходы к составлению уравнений для решения этой задачи, вы убедитесь как затруднительно добиться успеха без использования графиков равномерного движения гонщиков. Но и здесь в формировании подходящих графиков надо проявить некоторое остроумие. Если это не будет удаваться, загляните на с. 407.

ВОЛШЕБНАЯ КРАСОТА МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ

Красивы не только они сами, но и приемы их составления. Занимателен такой прием составления магического квадрата 7×7 из последовательности натуральных чисел: в отчеркнутую часть (см. рис.) квадрата 7×7 вписана «диагонально» последовательность нечетных чисел (1, 3, ..., 49).



			8	2					
		22	16	10	4				
	36	30	24	18	12	6			
	44	38	32	26	20	14			
		46	40	34	28				
			48	42					

Из оставшихся «уголков» скомпонована симметричная фигура (рис. вверху), в клетки которой также «диагонально» вписана последовательность четных чисел (2, 4, ..., 48). Теперь завершающим этапом конструирования магического квадрата является задача: разъединить фигуру (2) на «уголки» и приставить их к фигуре (1) так, чтобы восстановленный квадрат оказался «магическим», то есть образовалась бы одна и та же сумма чисел, расположенных вдоль каждой строки, каждого столбца и каждой из двух диагоналей (16 равных «магических» сумм).

СТУДЕНТКИ СДАЮТ ЭКЗАМЕН ПО ПРЫЖКАМ В ВЫСОТУ

Рейку, первоначально установленную на достаточно высоком уровне, преодолела и, следовательно, получила зачет, каждая 2-я из группы студенток-спортсменок, сдающих экзамен по прыжкам в высоту. Для 2-го захода потерпевшим неудачу на 1-м заходе зачетную высоту немного снизили. Эту высоту «взяла» каждая 3-я спортсменка. Невероятно, но факт: на 3-м заходе получила зачет каждая 4-я спортсменка ..., на n -м заходе взяла зачетную высоту каждая $(n + 1)$ -я.

Эта «небывальщина» естественно должна оборваться, когда для очередного k -го захода останется не более, чем k спортсменов.

Так и случилось. Только 10 студентов из числа всех участников 1-го захода не смогли «взять» назначаемую зачетную высоту и на всех последующих 9 заходах. И как раз после 10-го захода прием экзамена прекратился.

Сколько студентов сдали экзамен с 1-го же захода?

ДУЭЛЬ ПО-ВЕНГЕРСКИ

Дуэль, — когда один целится в другого, чтобы ни за что, ни про что убить его, — отвратительна. Уж коль никак не удастся разойтись «с миром», куда как «благороднее» дуэль по-венгерски, когда стреляет каждый в себя, делая не больше, чем по одному выстрелу из одного револьвера, заряженного только двумя пулями, вложенными в произвольно выбранные гнезда барабана шестизарядного револьвера; 4 гнезда оставлены пустыми. При этом, в случае трагического исхода для стрелявшего в себя первым, второй дуэлянт, естественно, не делает своего выстрела.

Барабан револьвера прокручивают один раз — перед началом такой «самоубийственной» дуэли.

Для стреляющего первым вероятность избежать пули в собственный лоб (событие A) определяется легко: четыре шанса против двух, следовательно, вероятность $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = P_1$.



Вероятность (P_2) такого же благоприятного исхода для стреляющего вторым, чувствуется интуитивно — больше, чем P_1 , но вот насколько ли?

Я считаю, что не намного — всего лишь на 1 шанс из 15-ти, то есть на $\frac{1}{15}$.

А как по вашему подсчету?

ДИКОВИНКИ СРЕДИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

В мире натуральных чисел бесконечно много таких, каждое из которых имеет только два натуральных делителя: единицу и себя. Это — *простые числа*. Свойства простых чисел интригуют и ученых, и любителей. Накопилось много доказанных теорем о простых числах, но еще больше недоказанных, среди которых есть важные для науки, а есть и «любительские».

Любители часто увлекаются выявлением уникальных простых чисел с диковинными особенностями, своего рода «числовых сувениров» — «магических амулетов». А это — нелегкий труд, поистине ювелирный.

Взгляните на триптих из магических квадратов (рис. на с. 386). Каждый из них имеет по 8 «магических» сумм — убедитесь! Все числа, разместившиеся в ячейках этих квадратов — *простые*, причем — с одинаковыми последними цифрами в каждом: 1 или 9 или 3.

Аналогичный «магический амулет» — диковинка с последней цифрой 7 в каждом из девяти простых чисел — нашел свое место в поэтико-математической композиции «Быть, или не быть?» (с. 299).

Задача 1. Обратитесь к рисунку на с. 386. Из ячеек каждого «магического амулета» извлеките все числа и расположите их возрастающей последовательностью отдельно для каждого «амулета».

Что скажете о разностях между соседними членами в каждой последовательности?

* * *

Еще из коллекции «диковинок»: три простых числа с обилием девяток:

199999, 9999999999091, 9999999999989

и одно огромное простое, очаровывающее устойчивой закономерностью в расположении цифр:

1234567891234567891234567891

№ 1

571	1051	181
211	601	991
1021	151	631

№ 2

1669	199	1249
619	1039	1459
829	1879	409

№ 3

823	1093	643
673	853	1033
1063	613	883



* * *

Вам захотелось поразить друзей мгновенным «извлечением из памяти» какого-либо простого числа за пределами первой сотни. Нет ничего проще.

Напишите подряд n последовательных степеней числа 3 ($n = 0, 1, 2, 3$), начиная с 3^0 , и закончите запись цифрами 01 или 07. К вашим услугам объявятся восемь простых чисел:

101 и 107, 1301 и 1307, 13901 и 13907, 1392701 и
1392707.

* * *

Меня местами цифры простого числа 1123 можно образовать 12 разных чисел. Из них 8 оказываются простыми. Вот они:

1123, 1213, 1231, 1321, 2113, 2131, 2311, 3121.

Задача 2. Таким же свойством обладает еще одно простое четырехзначное число несколько большее чем 1123. Найдите его.

Задача 3. Среди двузначных простых чисел есть 9 таких, которые остаются простыми после перестановки цифр, например, простое число 13 после перестановки цифр обращается в простое число 31. Найдите остальные 7 чисел.

ЗАНЯТЫЕ СТАЙКИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Пойманные И.С. Зельцером из Тирасполя и мною, «стайки» привлекли нас своеобразием и красотой своих формаций. Любуйтесь, и участвуйте в дальнейших поисках!

1. 168 мест *первой тысячи* натуральных чисел занимают простые числа: 2, 3, 5, ..., 997. Из них 16 чисел — палин-

дромические — каждое равно обращенному: 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929.

Четырехзначных простых чисел всего 1061, и ни одно из них не является палиндромическим.

Пятизначных простых палиндромических чисел много. В их составе и такие красавцы: 13331, 15551, 16661, 19991. Полагаем, что есть стайки и такого вида: $3^{***}3$, $7^{***}7$, $9^{***}9$.

Но сколько же экземпляров в каждой такой стайке?

Существуют ли палиндромические числа среди простых n -значных чисел при $n > 5$?

2. Из 12 различных чисел, получающихся при перестановках цифр числа 3211, ровно 8 — простые: 3121, 2311, 2131, 2113, 1321, 1231, 1213, 1123.

Также 8 простых чисел формируются из цифр 1, 1, 3, 9: 1193, 1319, 1913, 1931, 3119, 3191, 3911, 9311. Возможно, это рекорд для *четырехзначных* простых чисел с *двумя одинаковыми цифрами*. Так ли это?

Для *четырехзначных* простых чисел с *тремя одинаковыми цифрами* рекорд — 3 простых из возможных четырех, например: 1777, 7177, 7717 и еще 7333, 3733, 3373.

Сколько же всего подобных «стаек» вылетает из гнезда *четырехзначных чисел*? *Пятизначных чисел*?

3. Некоторые простые числа находят в своем семействе симметричное себе число. Так формируются красивые стайки симметричных пар «перевертышей»: 4 пары *двузначных* — 13 — 31, 17 — 71, 37 — 73, 79 — 97, 14 пар *трехзначных* — 107 — 701, 113 — 311, ..., 739 — 937, 769 — 967, 100 пар *четырехзначных*, среди которых только 6 пар с *одинаковыми средними цифрами*: 1009 — 9001, 1223 — 3221, 1559 — 9551, 1669 — 9661, 3889 — 9883, 7229 — 9227.

Сколько всего *симметричных* пар перевертышей среди *пятизначных* простых чисел? Сколько из них имеют вид *аххха*?

4. В первой тысяче чисел есть 5 «квартетов», состоящих из *подряд* идущих простых чисел, последние цифры которых образуют последовательность 1, 3, 7, 9 — (11, 13; 17,

19), (101, 103, 107, 109), (191, 193, 197, 199), (211, 223, 227, 229), (821, 823, 827, 829) — и все, кроме одного, имеют в составе по две пары «близнецов».

Сколько таких же «квартетов» есть среди n -значных простых чисел при $n > 3$?

5. В четырех «гнездах» разместились *трехзначные* простые числа

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 9 & 1 & 9 \\ 9 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 3 \\ 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 7 \\ 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

так, что их цифры образуют квадратные матрицы с одинаковыми суммами по строкам, столбцам и одной диагонали в каждой матрице. В первых трех матрицах формируются простые числа даже при чтении цифр справа налево, сверху вниз и снизу вверх.

Найдутся ли матрицы с аналогичными свойствами среди n -значных простых чисел при $n > 3$?

6. Стайка из девяти простых чисел: 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669 и 1879 — привлекательна не только тем, что она являет собой *арифметическую прогрессию* с разностью $d = 210$, но и способностью разместиться в девяти клетках так, что образуется магический квадрат с константой, равной разности двух простых чисел: 3119—2:

1669	199	1249
619	1039	1459
829	1879	409

Следующий, десятый член рассматриваемой прогрессии: $a_{10} = 2089$ — также число простое. Если удалить из стайки $a_1 = 199$, но включить a_{10} , то и в этом составе стайка может образовать магический квадрат — тема для поиска.

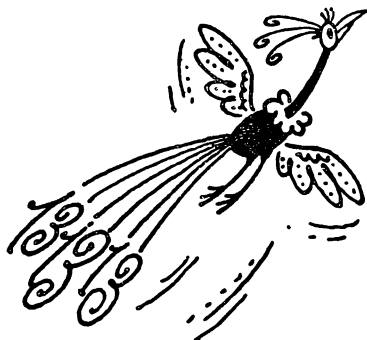
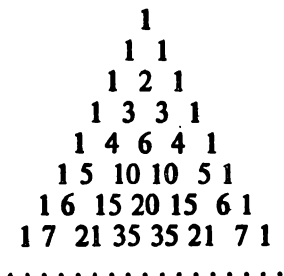
7. Интересна стайка «жар-птиц» — простых чисел с «пером» 13 в «хвостике»: 13, 113, 313, 613, 1013, 2113, 3613, 4513,

«Гнездо» их — формула $P = 13 + 100T_n$,
где $T_n = 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, \dots$

Все эти числа, включая зачеркнутые, но без нуля, называются *треугольными* (T_n) и определяются формулой $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Конечно ли число «жар-птиц» в этом гнезде?

Дополнительное наблюдение: все *треугольные числа* входят в состав *треугольника Паскаля*, располагаясь вдоль одной из параллелей к его «боковой стороне».



8. 31 — обращенное числу 13 — другой «хвостик» у стайки простых чисел:

31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 33333331.

Их «гнездо» — формула

$$P_k = \frac{1}{3} (10^k - 7),$$

где $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Нет ли в этом «гнезде» других P_k с тем же «хвостиком»?

9. Существует несколько (а сколько всего?) *троек* простых чисел вида $(3, 3 + d, 3 + 2d)$, например: $(3, 5, 7)$, $(3, 53, 103)$ и др., *пятерок* простых чисел вида $(5, 5 + d, 5 + 2d, 5 + 3d, 5 + 4d)$, например: $(5, 11, 17, 23, 29)$, $(5, 53, 101, 149, 197)$ и др. (а сколько всего?), *семерок* простых чисел с $a_1 = 7$ и $a_7 = a_1 + 6d$, например: $(7, 157, 307, 457, 607, 757, 907)$; есть ли еще семерки с $a_1 = 7$ и другими значениями d ?

Попытки подобрать последовательность *равноотстоящих* простых чисел с $a_1 = 11$ и $a_1 = 13$ не увенчались успехом, но не удастся ли это кому-нибудь?

Задача. Еще одну «стайку» простых чисел в составе пяти двоек, четырех троек, шести пятерок и трех семерок поместили в «клетку»:

```

  ***
X  **
  **
  ****
  ****
  ****
  ****

```

символизирующую правильно выполненное действие умножения трехзначного числа на двузначное.

Раскройте «клетку» и покажите, как разместились птички-числа на местах звездочек.

СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА

Натуральное число, равное сумме своих делителей, разумеется, исключая делитель, равный самому числу, называется **совершенным** и обозначается символом V_n , где n — порядковый номер совершенного числа. Самое меньшее: $V_1 = 6$ ($= 1 + 2 + 3$). Следующие по старшинству: $V_2 = 28$ ($= 1 + 2 + 4 + 7 + 14$) и $V_3 = 496$ ($= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$).

Лев Николаевич Толстой не раз бывало шутливо «похвалялся» тем, что дата его рождения (28 авг., по календарю того времени) является совершенным числом. Год рождения Льва Толстого (1828) тоже интересное число:

а) последние две цифры (28) образуют совершенное число;

б) если поменять местами первые две цифры, то получится $V_4 = 8128$ — четвертое совершенное число.

«Возраст» этих четырех совершенных чисел солидный, не менее 2000 лет. Пятое совершенное число $V_5 = 33550336$ выявилось в 1460 г., а в 1644 г. француз Мерсенн (друг Ферма) нашел сразу четыре последующих совершенных числа (Мерсенн указал 6 чисел, но впоследствии выяснилось, что два из них не являются совершенными).

Нечетных совершенных чисел, по-видимому, не существует, но до сих пор это никем не доказано и не опровергнуто.

Л. Эйлер в 1750 г. доказал, что все *четные* совершенные числа могут быть представлены в виде произведения

$$2^{p-1} \cdot (2^p - 1),$$

где p и $2^p - 1$ — некоторые простые числа.

В такой форме теперь и записывают большие совершенные числа, например, $V_{18} = 2^{3216} \cdot (2^{3217} - 1)$.

Занятно, что «совершенство» совершенных чисел не исчерпывается совпадением числа и суммы его делителей. Любители и профессионалы-математики со временем обнаружили еще несколько любопытных особенностей совершенных чисел:

а) каждое из известных совершенных чисел разлагается на сумму последовательных степеней числа 2 от $2^p - 1$ до $2^{2(p-1)}$:

$$V_1 = 2 \cdot (2^2 - 1) = 6 = 2 + 2^2,$$

$$V_2 = 2^2 \cdot (2^3 - 1) = 28 = 2^2 + 2^3 + 2^4,$$

$$V_3 = 2^4 \cdot (2^5 - 1) = 496 = 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8,$$

$$V_4 = 2^6 \cdot (2^7 - 1) = 8128 = 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} + 2^{12},$$

$$V_5 = 2^{12} \cdot (2^{13} - 1) = 33550336 = 2^{12} + 2^{13} + \dots + 2^{24}, \text{ и т.д.}$$

б) каждое из известных совершенных чисел, начиная с V_2 , разлагается на сумму кубов последовательных нечетных чисел:

$$V_2 = 28 = 1^3 + 3^3,$$

$$V_3 = 496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3,$$

$$V_4 = 8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3,$$

$$V_5 = 33550336 = 1^3 + 3^3 + \dots + 127^3, \text{ и т.д.}$$

в) складывая цифры каждого из известных совершенных чисел, начиная с V_2 , и повторяя этот процесс для получающегося результата некоторое количество раз, всегда в конце концов получим число 1:

$$V_2 = 28; \quad 2 + 8 = 10; \quad 1 + 0 = 1;$$

$$V_3 = 496; \quad 4 + 9 + 6 = 19; \quad 1 + 9 = 10; \quad 1 + 0 = 1;$$

$$V_4 = 8128; \quad 8 + 1 + 2 + 8 = 19; \quad 1 + 9 = 10; \quad 1 + 0 = 1;$$

$$V_5 = 33550336; \text{ сумма цифр} = 28; \quad 2 + 8 = 10; \quad 1 + 0 = 1$$

и т.д.

Задача. Представьте каждое из известных вам совершенных чисел в виде произведения по формуле Эйлера и их же запишите в двоичной системе. Обнаружится любопытная закономерность в количестве единиц и нулей и их расположении в записи V_n по двоичной системе. Какая?

МАТЕМАТИЗИРОВАННАЯ ЮРИСПРУДЕНЦИЯ

Студентка последнего курса юридического факультета, Варя Ничкова, в последнее время серьезно увлеклась алгеброй логики и не напрасно: следственные дела, которые ей придется вести, требуют всесторонней логической подготовки и острого мышления. Иногда она придумывала разнообразные «конфликты», пусть может быть и мало-правдоподобные, но вполне пригодные для тренировки и практического применения хотя бы простейших математических приемов решения логических задач.

Начальные элементы алгебры логики общедоступны. Условимся, что эквивалентом всякого *верного* утверждения будет число 1, а всякого *ложного* — число 0. Тогда сведения, полученные в ходе следствия, можно определенным образом закодировать (зашифровать) символами и составить из этих символов и чисел 0 и 1 некоторые алгебраические выражения и равенства. При этом каждое утверждение можно представить в двух видах:

1) как *произведение* — пусть буквами A и C обозначены два верных утверждения, то есть каждая буква имеет значение 1, тогда произведение $A \cdot C = 1$, но, если A или C ложно, то есть имеет значение 0, то $A \cdot C = 0$;

2) как *сумму* — пусть одно из этих утверждений верное (имеет значение 1), а другое ложное (имеет значение 0), тогда $A + C = 1$.

Заметим, что и сумму двух *верных* утверждений (то есть двух единиц) следует считать равной 1, так как в нашей алгебре нет чисел превышающих единицу; в самом деле, ведь ничто не может быть более правильным, чем «верно».

Варя начала свои упражнения с простого логического примера.



Задача. Имеем два показания об имени и фамилии юноши.

Первое: Толя Пуговкин.

Второе: Петя Пуговкин.

Известно, что каждое показание содержит одну ошибку или в имени, или в фамилии.

Каков вывод следствия?

Решение (без алгебры). Если ошибочно названа фамилия, то имя юноши Толя верно, по первому показанию; точно также и верно, что имя юноши Петя (по второму показанию). Однако человек не может иметь два имени, значит верно, что его фамилия Пуговкин, но имя юноши не Толя и не Петя.

Второе решение.

— А как с помощью алгебры логики могло бы получиться решение этой задачи — полюбопытствовала Варя.

Закодируем показания: пусть A означает Толя, B — Петя, C — Пуговкин.

Так как в первом показании верно только либо A , либо C , то $A + C = 1$ и $A \cdot C = 0$; во втором показании верно либо B , либо C , тогда $B + C = 1$ и $B \cdot C = 0$.

Перемножая две суммы получим: $(A + C) \cdot (B + C) = 1$.

Раскроем скобки: $A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C + C^2 = 1$.

Очевидно, что $A \cdot B = 0$ (если бы $A \cdot B = 1$, то $A = 1$ и $B = 1$, то есть верно, что имя юноши Толя и верно, что имя того же юноши Петя, но это невозможно). Так как, кроме того, $A \cdot C = B \cdot C = 0$, то остается $C^2 = 1$, откуда $C = 1$. Это значит: верно, что фамилия юноши Пуговкин. Равенства $A \cdot C = B \cdot C = 0$ при $C = 1$ дают $A = 0$ и $B = 0$, а это значит, что имя юноши не Толя и не Петя.



Еще задача.

Своим новым увлечением Варя заинтересовала сестру Тасю и даже маму с папой. Однажды они подготовили для Вари небольшую инсценировку «следствия»:

— Варечка, вот тебе мое сообщение, — сказала мама, — вчера я узнала, что сын Николая Ивановича — Саша — женился, а ему еще только 21 год. Не рановато ли?

— Ты все напутала, дорогая, — заметил папа, — сына Николая Ивановича зовут Костя и ему еще только недавно исполнилось 18.

— Я не знаю семью Николая Ивановича, — вступила в разговор Тася, — но помню подруга утверждала как-то в разговоре, что сыну Николая Ивановича добрых 25 лет, и при этом называла она его другим именем, не Сашей.

— Определи-ка, наша юристка, теперь сама имя и возраст сына Николая Ивановича, — заключил отец, — если в каждой информации содержатся верные сведения либо только о возрасте, либо только об имени.

Решение.

Варя и на этот раз воспользовалась приемами алгебры логики и ввела обозначения: a — Саша, b — Костя, c — не Саша, d — 18 лет, e — 21 год и f — 25 лет.

Мама сказала: « $a \cdot e$ »; папа сказал: « $b \cdot d$ », а Тася сказала: « $c \cdot f$ ». Так как часть каждой информации неверна (имеет значение 0), то $a \cdot e = b \cdot d = c \cdot f = 0$ и $a + e = 1$, $b + d = 1$, $c + f = 1$. Сын Николая Ивановича не может иметь сразу два имени и два возраста, следовательно,

$$a \cdot b = a \cdot c = d \cdot e = d \cdot f = e \cdot f = 0.$$

Перемножим суммы $a + e = 1$ и $b + d = 1$; тогда $a \cdot b + a \cdot d + b \cdot e + e \cdot d = 1$; после выбрасывания нулевых членов останется равенство: $a \cdot d + b \cdot e = 1$. Перемножим эту сумму и сумму $c + f = 1$, что, после выбрасывания нулевых членов, даст равенство $b \cdot c \cdot e = 1$, откуда следует, что $b = 1$, $c = 1$ и $e = 1$ (верная информация). Значит, сына Николая Ивановича зовут не Саша ($c = 1$), а Костя ($b = 1$) и возраст его — 21 год ($e = 1$).

Задача (для самостоятельного решения).

А для вас, дорогие читатели, я придумал (конечно, не без помощи будущего следователя Вари Ничковой) вполне правдоподобное интервью с четырьмя очаровательными марсианками: Марсой, Мерсой, Мирсой и Морсой.

Я попытался выяснить их возраст и обратился сначала к Марсе. Она ответила двумя короткими фразами:

— Мирсе 22, Мерсе 21.

Я взглянул на Мерсу в ожидании ее ответа, но и она мне мало помогла.

— Морсе 19, Мирсе 21.

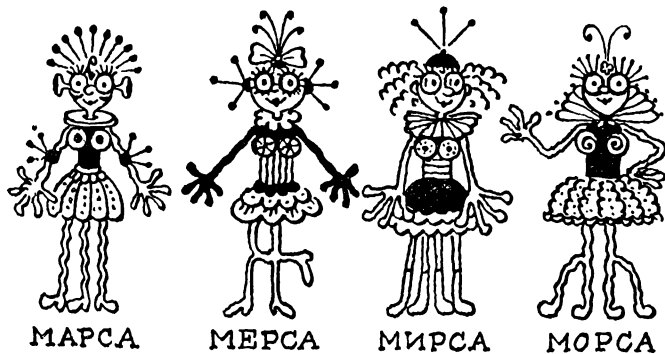
Столь же лаконично ответила Мирса:

— Марсе 21, Морсе 18.

Морса ограничилась грациозным поклоном и ничего не сказала.

Привлекая простейший аппарат алгебры логики, по аналогии с решениями предыдущих задач, разберитесь в этом клубке разноречивых ответов прекрасных марсианок и установите возраст каждой из них.

При этом следует иметь в виду, что девушки не однолетки и они еще до сих пор придерживаются древнейшего обычая марсианок (только ли марсианок?): если высказано подряд два утверждения, правдиво только одно — может быть первое, а может быть второе.



МАРСА

МЕРСА

МИРСА

МОРСА

ПРОИГРАВШИЙСЯ МАЙК ЖАЖДЕТ РЕВАНША

Партнер Майка, Стив предложил такую систему последовательных «ставок»: в первой партии проигравший отдает выигравшему 1 цент, во второй партии — 2 цента и т.д., каждый раз удваивая «ставку». Майк согласился, предупредив Стива, что имеет в кармане всего 601 цент и никогда не играет более десяти партий.

Игра началась. Партия шла за партией, пока, наконец, Майк не остановил игру, отдав Стиву все до последнего цента, что как раз и составило его последний проигрыш.

— Но я возьму реванш на следующей неделе, — заявил погрузневший Майк.

Сколько партий было сыграно и какие из них выиграл Майк?

СЦЕНАРИЙ — НАШ, ИСПОЛНИТЕЛЬ — КОМПЬЮТЕР

Философа в машинный век
Сомнения томят:
Не стал бы завтра человек
Похож на автомат.
В глазах и в голосе — слеза:
Проблема так остра...
Но что бы ни было, я — за
Автоматизм добра.

Числовые ребусы — захватывающе-увлекательный, развивающий мышление — жанр математических головоломок. Приглядываясь к структуре заданного ребуса, вы намечаете и осуществляете систему рассуждений, перемежаемых практическим перебором вариантов, то есть являетесь одновременно составителем (сценаристом) и исполнителем своей же программы действий.

Однако, берегите время, и скучную часть программы — перебор вариантов — поручайте быстродействующему роботу — умному компьютеру.

Воспользуясь (разумеется — не обязательно!) дружеской помощью компьютера, расшифруйте следующие три простеньких ребуса. К первому из них прилагаю сценарий решения (на языке Бейсик). Составьте сценарий решения второго и третьего ребусов, или загляните на с. 413.

Первый ребус. Расшифруйте равенство:

$$\text{КТО} + \text{КОТ} = \text{ТОК}.$$

Сценарий решения:

```
10 FOR K = 1 TO 9
20 FOR T = 0 TO 9
30 FOR O = 0 TO 9
40 IF 1 + (100*K + 10*T + O) +
    + (100*K + 10*O + T) =
    = (100*T + 10*O + K)
    THEN PRINT K, T, O
50 NEXT O, T, K
60 END
```

Второй ребус.

Расшифруйте равенство $\overline{AABV} = \overline{CD}^2$.

Третий ребус.

Расшифруйте равенство $\overline{РАДАР} = (P + A + D)^4$.



РЕШЕНИЯ

ПРИЧУДЫ КАЛЕНДАРЯ

1. За четыре недели с 1 по 28-е число каждый день недели наступает по 4 раза, следовательно, февраль не удовлетворяет требованиям причудливого календаря, равно как и все месяцы с 31 днем. Если же месяц 30-дневный, то возможен лишь один вариант распределения дней по числам: 29-е и 1-е — воскресенье, 30-е и 2-е числа — понедельник. Следовательно, 5-е число этого месяца — четверг. И месяц — не июль и не август.

2. В четырех неделях с 1 по 28-е — четыре воскресенья. Из них два наступают в четные числа. Третье воскресенье должно наступить в четное число последней недели этого месяца, то есть 30-го.

Значит, первое воскресенье месяца было 2-го числа, 5-е число — среда.

ЧИСЛА-«САМОРОДКИ»

Вот все двузначные «самородки»:

20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97.

МОЖЕТ ЛИ БЫТЬ ТАКОЕ...

Пусть k_1, k_2, \dots, k_n ($n = 2, 3, \dots$) — произвольно назначенные натуральные числа и пусть $k_1 + k_2 + \dots + k_n = \alpha$, $k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2 = \beta$.

Введем числа $m_1 = k_1 \frac{\alpha}{\beta}$, $m_2 = k_2 \frac{\alpha}{\beta}$, ..., $m_n = k_n \frac{\alpha}{\beta}$. Вычисляем:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = \frac{\alpha}{\beta}(k_1 + k_2 + \dots + k_n) = \frac{\alpha^2}{\beta},$$

$$m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}(k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2) = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot \beta = \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

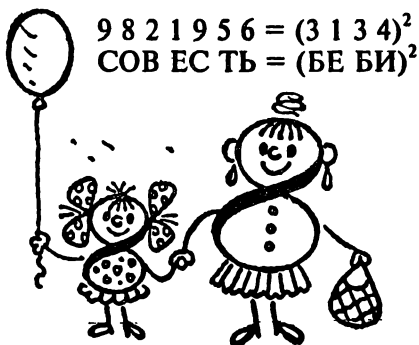
Равенство сумм подтверждено, следовательно $m_1 = k_1 \frac{\alpha}{\beta}$, $m_2 = k_2 \frac{\alpha}{\beta}$, ..., $m_n = k_n \frac{\alpha}{\beta}$ — искомые числа.

А ЕЩЕ НАЙДЕТЕ?

$$4,5; 3,750; \frac{24}{6}; \frac{54}{9}; \frac{36}{12}; \frac{63}{21}.$$

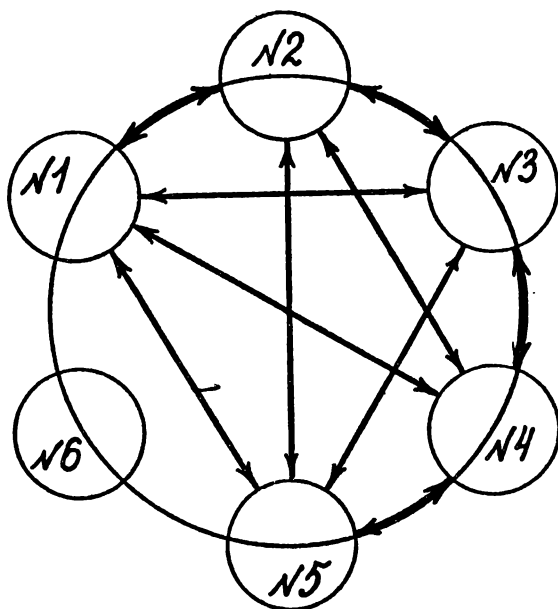
КАКОВА СОВЕСТЬ У ВАС?

9821956 — наибольшее из возможных подходящих квадратных чисел:



НЕОБЫЧНАЯ МАНЕРА ПРИГЛАШЕНИЯ, И ВСЕ ЖЕ...

Пусть поликлиники имеют номера: № 1, № 2, № 3 и т.д. Возможные попарные их объединения отметим стрелками на рисунке. Имена врачей отмечаем заглавными буквами: А, Б, В, ... Пусть врач А работает в поликлиниках № 1 и № 2. Аналогично, врач Б представляет объединение поликлиник № 1 и № 3, врач В — № 2 и № 3. Далее, врач Г — № 1 и № 4, Д — № 2 и № 4, Е — № 3 и № 4. Чтобы получилось по 4 врача от каждой поликлиники, подключим к схеме еще одну поликлинику — № 5. Тогда врач Ж будет представлять объединение № 1 и № 5, врач З — № 2 и № 5, И — № 3 и № 5, К — № 4 и № 5. Теперь все пункты условия удовлетворены и получаем ответ: в городе 5 поликлиник; на симпозиум приглашено 10 врачей.



ПРИМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Искомое число должно иметь вид $2^m \cdot 3^n \cdot 5^p$, где m — наименьшее кратное чисел 3 и 5, n — наименьшее кратное чисел 2 и 5, p — наименьшее кратное чисел 2 и 3.

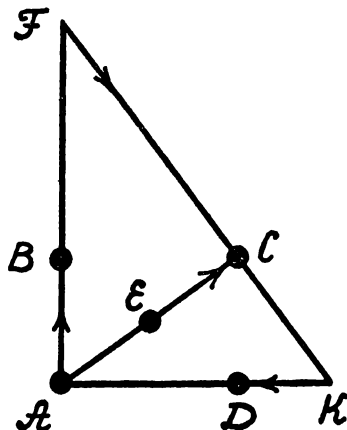
Итак, искомое число $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$. Возможно ли меньшее?

НЕОБЫЧНОЕ В ПРИВЫЧНОМ

Вот правильное объяснение. Пусть P и P' — две точки листа бумаги, совпадающие при его перегибе. Так как лист бумаги нерастяжим, то при его перегибании с наложением одного куска листа на другой расстояния сохраняются. Поэтому любая точка A линии сгиба отстоит от точек P и P' на одинаковое расстояние и отрезки AP и AP' при перегибе листа бумаги совпадают. Следовательно, линия сгиба, как геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка PP' , представляет собой прямую, проходящую через середину отрезка PP' , перпендикулярную ему.

МАРШРУТ ЧЕРЕЗ 5 ТОЧЕК

Можно построить последовательно отрезки (см. рис.): AF через точку B , FK — через точку C , KA через точку D и AC через точку E .

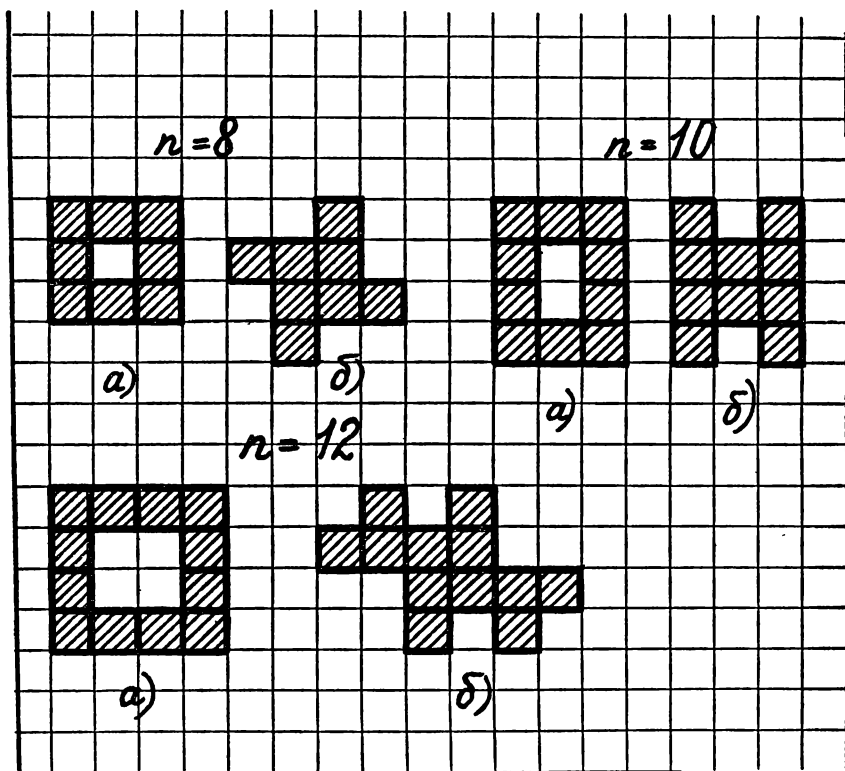


СКРЫТАЯ ЭСТЕТИКА ШЕСТИЗНАЧНОГО ЧИСЛА

$$n = 234256.$$

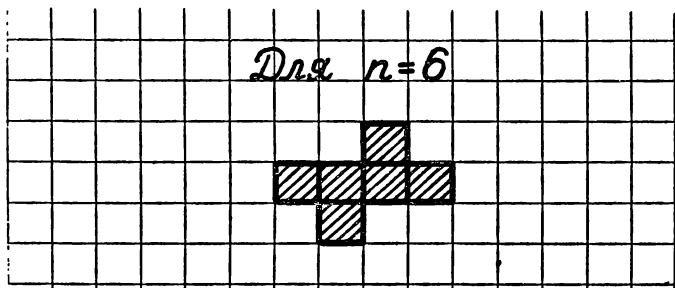
КЛЕТКИ-СОСЕДКИ

Решения на рисунке.



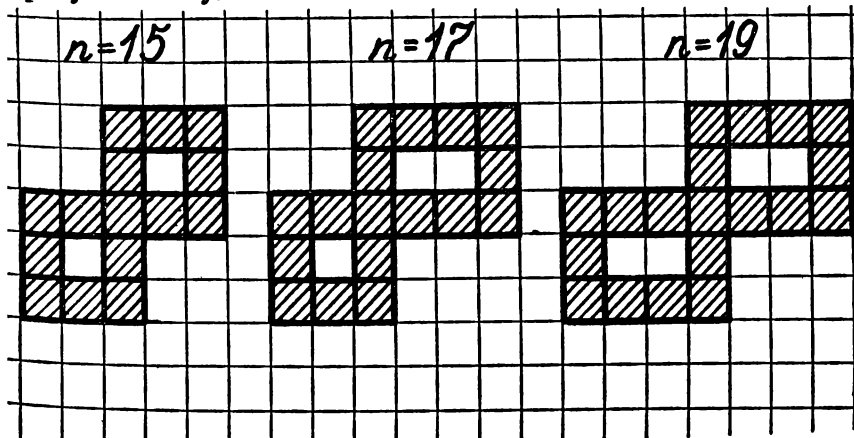
КАПРИЗНЫЕ СОСЕДКИ (Продолжение)

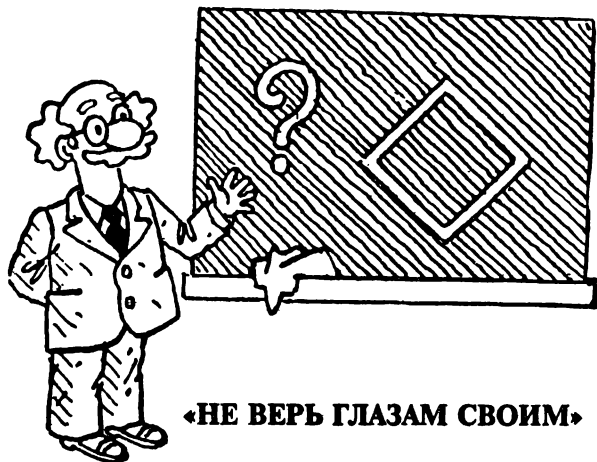
Для $n = 6$ возможное решение — тип б) — представлено на рисунке:



Докажем, что из нечетного количества клеток, например из 15, фигура типа б) невозможна. Установим, сколько же должно быть общих сторон у всех клеток проектируемой фигуры. Удобен такой способ вычисления: сосчитать сколько у каждой клетки общих сторон с соседками; полученные числа сложить и сумму разделить на 2 (каждую общую сторону считали дважды). Но по условию у каждой клетки — нечетное число соседок, а клеток 15. Сумма 15 нечетных чисел нечетна и потому на 2 не делится. Значит, проектируемая фигура невозможна.

Для $n = 15, 17, 19$ решения типа а) представлены на рисунке внизу.





Причина разногласия — в определении: какая фигура называется ТРАПЕЦИЕЙ? Учитель венгерской школы, по-видимому, предпочел дать своим ученикам более древнее определение трапеции: «выпуклый четырехугольник, две стороны которого параллельны». В России и ряде других стран это определение дополняют еще одним условием: «А две другие стороны не параллельны».

По первому — укороченному — определению начерченный ромб мог быть назван и параллелограммом, и трапецией (3 утверждения истинны), а назвавший фигуру квадратом, высказал ложное утверждение (ромб — не квадрат).

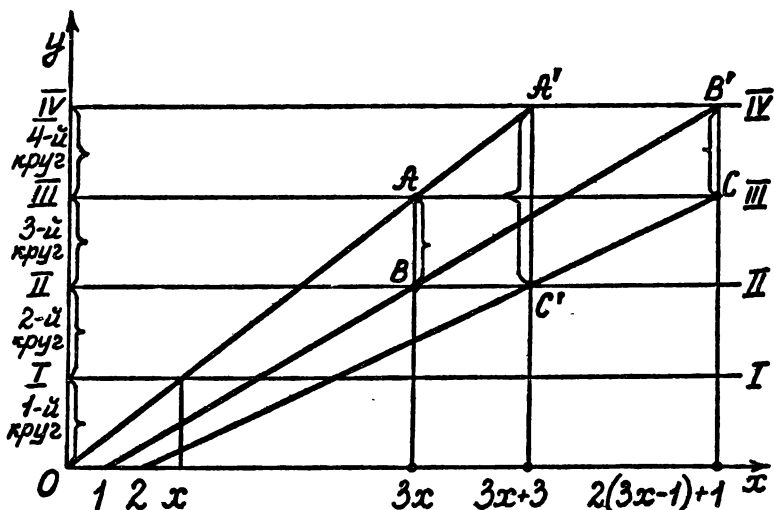
Но, в соответствии с принятым в школах России определением трапеции (из четырех сторон параллельны только две), ромб — не трапеция и потому справедливость реплики учителя сохраняется лишь при условии, что начерчен был квадрат, а не ромб.

КАРТИНКИ РАВНОМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ...

Задача 1. 16 ч.

Задача 2. $AB = 3a - b$ ($a > 0$, $b > 0$, $3a > 2b$). Соотношение $3a > b$ не является достаточным условием существования решения задачи.

Задача 3. Постепенно формируемые графики представлены на рисунке.



Сначала строим график OA' — для гонщика A . В пересечении с прямой I-I образуется точка с искомой абсциссой x ($x > 2$ по условию). Затем, в соответствии с условием, отмечаем точку B на прямой II-II с абсциссой $3x$ и строим график OB' — для гонщика B . Аналогично, по точке B' находим точку C (на III-III) с абсциссой $2(3x - 1) + 1$ и прямую OC' — график для C .

Длину кольцевого шоссе примем за единицу, тогда скорости гонщиков (тангенсы углов между каждым графиком и осью Ox):

$$V_A = \frac{1}{x}, \quad V_B = \frac{2}{3x-1}, \quad V_C = \frac{3}{2(3x-1)+1-2}.$$

Чертеж и условие задачи приводят к уравнению

$$V_A(3x+3) - V_C(3x+1) = 2,$$

откуда $x = 3$ (мин).

СТУДЕНТКИ СДАЮТ ЭКЗАМЕН ПО ПРЫЖКАМ В ВЫСОТУ

Решаем «с конца». Известно, что на 10-м заходе студенток на зачет добивается успеха каждая 11-я, следовательно, участниц в этой последней попытке «взять» назначенную высоту было 11, а может быть 10. В первом случае «каждой 11-й» оказалась одна прыгунья и остались без зачета 10, во втором — «каждой 11-й» нет, значит, все 10 остались без зачета. Участниц 9-го захода, на котором каждая 10-я добивалась успеха, было соответственно 12 или 11, и т.д. Процесс такого постепенного продвижения к искомому числу студенток, сдавших экзамен с 1-го захода, представлен следующей таблицей:

Номер захода (от последнего к первому)	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Число участниц	11 10	12 11	13 12	14 13	16 15	19 18 17	23 22 21	30 29 28 27	45, 44 43 42, 41 40

Так как с 1-го захода экзамен сдала (и не сдала) каждая вторая студентка, то число студенток, получивших зачет на 1-м заходе, равно числу студенток, вынужденных участвовать во 2-м заходе. Стало быть возможно 6 значений искомого числа: 40, 41, 42, 43, 44 и 45.

ДУЭЛЬ ПО-ВЕНГЕРСКИ

Если стреляющий первым остался невредимым (событие A), значит под курком револьвера «прошло» пустое гнездо барабана. После чего под курком револьвера появилось либо вновь пустое гнездо (одно из трех), либо — с пулей (одно из двух), и вероятность появления второго пустого гнезда равна $\frac{3}{5}$. Но событие B — «остаться невредимым стреляющему вторым» — зависимое от появления или не появления предшествующего ему события A , вероятность появления которого $P_1 = P(A) = \frac{2}{3}$.

Поэтому вероятность появления события C — «второй дуэлянт остался невредимым после того как произошло событие A » — равна $P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. (За разъяснениями, относящимися к «алгебре событий», отсылаю к своей книге: «Математика изучает случайности». М.: 1975.) Но и это еще не полная вероятность события B , которое наступает также и при трагичном исходе для стреляющего первым, — его вероятность равна $\frac{1}{3}$. Эта вероятность прибавляется к вероятности $P(C) = \frac{2}{5}$.

Итак, окончательно, $P(B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$. Сравнивая с $P(A) = \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$, находим, что $P(B)$ больше чем $P(A)$ всего лишь на $\frac{1}{15}$.

ДИКОВИНКИ СРЕДИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Задача 1. Для «амулета» № 1: 199, 409, 619, 829; 1039, 1249, 1459, 1669, 1879 — арифметическая прогрессия: каждое последующее число больше предыдущего на 210.

Для «амулета» № 2:

$$\underbrace{151, 181, 211}_{30}, \underbrace{571, 601, 631}_{30}, \underbrace{991, 1021, 1051}_{30}$$

— дважды «разломленная» арифметическая прогрессия с сохранением разности $d = 30$ и «прыжка» $m = 361$ в разломах.

Аналогично для «амулета» № 3:

$$\begin{array}{ccccccc} 613, & 643, & 673, & 823, & 853, & 883, & 1033, & 1063, & 1093, \\ \underbrace{\quad\quad}_{30} & \underbrace{\quad\quad}_{30} & \underbrace{\quad\quad}_{150} & \underbrace{\quad\quad}_{30} & \underbrace{\quad\quad}_{30} & \underbrace{\quad\quad}_{150} & \underbrace{\quad\quad}_{30} & \underbrace{\quad\quad}_{30} \end{array}$$

$d = 30$, «прыжок» $m = 150$.

Задача 2. Таким числом является 1193. Восемь перестановок цифр (из двенадцати возможных) также являются простыми числами. Пользуясь таблицей простых чисел, вы их легко установите.

Задача 3. 11, 17, 71, 37, 73, 79, 97.

ЗАНЯТЫЕ СТАЙКИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Задача. Рассматривая варианты произведения числа единиц множимого на число единиц множителя, находим только три подходящих (число единиц произведения — простое): $15 = 3 \cdot 5$, $25 = 5 \cdot 5$, $35 = 7 \cdot 5$. В любом из них ни 5, ни 7 не могут заменить звездочку на месте единиц множителя, так как в записи промежуточного результата умножения множимого на 5 или на 7 (первая строка под чертой) появились бы цифры, отличные от 2, 3, 5, 7, что недопустимо.

Следовательно, цифра единиц множителя — 3, а цифра единиц множимого — 5. Аналогичные доводы приведут к окончательному результату:

$$\begin{array}{r} \times 775 \\ \quad 33 \\ \hline 2325 \\ 2325 \\ \hline 25575 \end{array}$$

СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА

Взглянув на таблицу совершенных чисел, замечаем, что число единиц в двоичной записи совпадает с числом p в десятичной записи совершенного числа $V_n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, а число нулей равно $p - 1$.

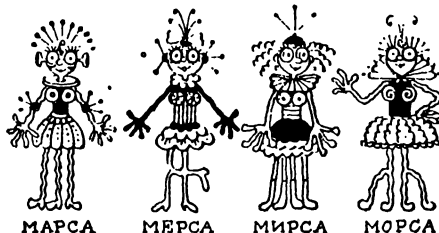
Таблица совершенных чисел

По основанию 10	По основанию 2
$V_1 = 6 = 2(2^2 - 1)$	$V_1 = 110$
$V_2 = 28 = 2^2(2^3 - 1)$	$V_2 = 11100$
$V_3 = 496 = 2^4(2^5 - 1)$	$V_3 = 111110000$
$V_4 = 8128 = 2^6(2^7 - 1)$	$V_4 = 1111111000000$
и т.д.	

МАТЕМАТИЗИРОВАННАЯ ЮРИСПРУДЕНЦИЯ

Закодируем показания марсианок:

- I. $\begin{cases} a - \text{Мирсе 22 года,} \\ b - \text{Мерсе 21 год.} \end{cases}$
- II. $\begin{cases} c - \text{Морсе 19 лет,} \\ d - \text{Мирсе 21 год.} \end{cases}$
- III. $\begin{cases} e - \text{Марсе 21 года,} \\ f - \text{Морсе 18 лет.} \end{cases}$



Так как в каждом показании верно только одно утверждение, то

1. $a + b = 1, c + d = 1, e + f = 1,$

2. $a \times b = 0, c \times d = 0, e \times f = 0,$

3. $a \times d = 0, c \times f = 0, b \times d = 0, b \times e = 0$

(последние два равенства вытекают из условия: девушки не однолетки).

Перемножим два первых равенства:

$$a \times c + a \times d + b \times c + b \times d = 1.$$

Отбросив нулевые члены, получим: $a \times c + b \times c = 1$, или $(a + b) \times c = 1$. Так как $a + b = 1$, то отсюда и $c = 1$ (Морсе 19 лет).

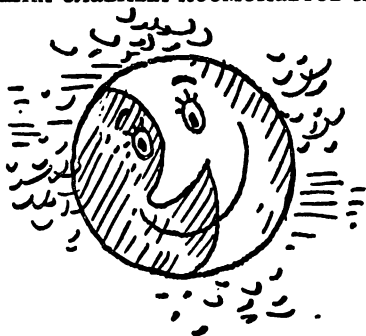
Из равенства $c \times f = 0$ при $c = 1$ следует, что $f = 0$. Из равенства $e + f = 1$ при $f = 0$ следует, что $e = 1$ (Марсе 21 год). Отсюда, $b = 0$ (так как $b \times e = 0$). Из равенства $a + b = 1$ при $b = 0$ следует, что $a = 1$ (Мирсе 22 года).

Окончательно:

Мирсе 22 года, Морсе 19 лет, Марсе 21 год.

Условия задачи недостаточны, чтобы выяснить возраст Мерсы.

Если судить по одному из ответов девушек, то Мерсе 18 лет, но так ли это в действительности, придется просить установить кого-либо из наших славных космонавтов при очередном рейсе на Марс.



ПРОИГРАВШИЙСЯ МАЙК ЖАЖДЕТ РЕВАНША

Так как $2^9 < 601 < 2^{10}$, то игралось 10 партий. Сумма всех ставок равна $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 = 1023$. Пусть суммарные выигрыши у Стива и Майка были соответственно x и y центов. Тогда $x + y = 1023$ и $x - y = 601$. Следовательно, $x = 812$, $y = 211$. Чтобы узнать номера партий, в которых Майк выигрывал, надо 211 представить как сумму степеней числа 2, иначе говоря — записать число 211 в двоичной системе.

Напомним способ: 211 делим на 2; остаток (1) дает первую цифру записи числа в двоичной системе; частное (105) делим на 2, остаток (1) дает вторую цифру; частное (52) делим на 2, остаток (0) дает третью цифру, и т.д.

Окончательно:

$$(211)_2 = (11010011)_2 = 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^1 + 2^0.$$

Расшифровывая эту запись (справа налево), заключаем: Майк выиграл первую, вторую, пятую, седьмую и восьмую партии, затем 2^8 центов проиграл в девятой партии и остальные 2^9 центов проиграл в десятой партии.

СЦЕНАРИЙ — НАШ, ИСПОЛНИТЕЛЬ — КОМПЬЮТЕР

Первый ребус. К = 4, Т = 9, О = 5.

Второй ребус.

```
10 FOR A = 1 TO 9
20 FOR B = 0 TO 9
30 FOR C = 1 TO 9
40 FOR D = 0 TO 9
50 IF 1000*A + 100*A +
    + 10*B + B = (10*C + D) * 2
```

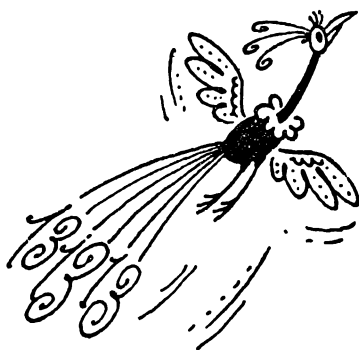
```
      THEN PRINT 1000*A + 100*A +  
                + 10*B + B, 10*C + D  
60 NEXT D, C, B, A  
70 END
```

Ответ: $7744 = 88^2$.

Третий ребус.

```
10 FOR R = 1 TO 9  
20 FOR A = 0 TO 9  
30 FOR D = 0 TO 9  
40 IF 10000*R + 1000*A + 100*D +  
    + 10*A + R = (R + A + D) * 4  
    THEN PRINT R, A, D  
50 NEXT D, A, R  
60 END
```

Ответ: $14641 = (1 + 4 + 6)^4$.





ДЕЛЕМ
„ОТКРЫТИЯ“

МИНИ • СЛОВАРИК

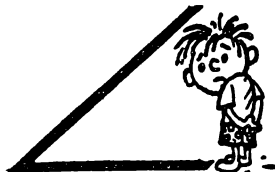
„открытий“ первообытными школьниками



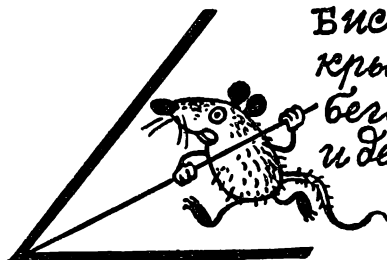
КРУГ - раздувшаяся точка.



Точка - угол, из которого вырваны стороны.



УГОЛ - простейшая единица наказания



Биссектриса - такая крыса, которая бежит по углам и делит их пополам.



Бесконечность - то место, где происходит то, чего не бывает.

Да, путь познания не гладок,
 Но знаем мы со школьных лет:
 Загадок больше, чем разгадок,
 И поискам предела нет!

А. Татьяничева

ГАРАНТИРОВАННАЯ ДЕЛИМОСТЬ

Всегда делится на 9 разность $R - S$, где R — год рождения любого читателя моей книги, S — сумма всех цифр его года рождения.

Не ищите опровергающего примера, его нет, доказать же истинность этого «открытия» возможно.

ПУТЬ ПОЗНАНИЯ УВЛЕКАТЕЛЕН, НО НЕ УСЫПАН РОЗАМИ

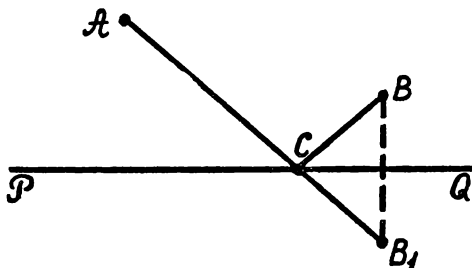
Еще одним подтверждением этой истины является «открытие» Шустрика, взбудоражившее весь класс и даже весь наш лицей.

Вот как это было. Понадобилось нам проложить тропинку из пункта A в пункт B (рис. внизу) с обязательным заходом в точку C , принадлежащую прямой PQ , но еще не отмеченную на ней.

Требовалось найти эту точку при условии, что тропинка $AC + CB$ будет кратчайшей.



Конечно, многим известна и задача эта, и ее решение. Строится точка B_1 , симметричная точке B относительно прямой PQ (см. рис.). Прикладывается линейка к точкам



A и B_1 , тогда точка пересечения прямых AB_1 и PQ и есть искомая точка C .

— Докажите правильность решения, — потребовал учитель.

Мы рассуждали так: отрезки BC и B_1C равны, следовательно:

$$AC + BC = AC + B_1C = AB_1;$$

длина отрезка AB_1 выражает наименьшее расстояние между точками A и B_1 , а так как $AC + BC = AB_1$, то точка C и есть искомая.

Как по-вашему: достаточно ли убедительно наше обоснование? Вы рассуждали бы иначе?

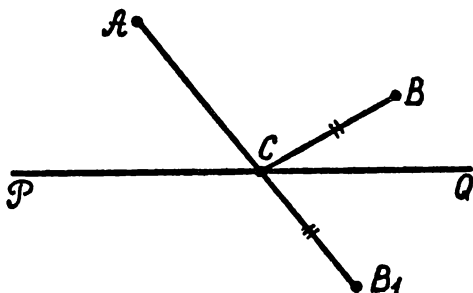
Впрочем, наши ребята и в книгах нашли аналогичные доказательства.

Прошел день, другой. Мы спокойно ждали очередного урока геометрии. И вдруг... все рухнуло.

— Прошу всех к доске, — с загадочным видом произнес Шустрик.

— Смотрите и удивляйтесь! На таком же чертеже я беру произвольную точку C прямой PQ . Продолжаю отрезок AC за точку C и откладываю $CB_1 = CB$ (рис. на с. 419). Рассуждаю как прежде:

$$AC + CB = AC + CB_1 = AB_1,$$



а длина отрезка AB_1 выражает наименьшее расстояние между точками A и B_1 . Значит и эта точка C — искомая. Парадокс: любая точка прямой может быть решением задачи!?

В чем же состоял логический изъян нашего первоначального, казалось бы, столь очевидного доказательства?

С ЧЕГО НАЧИНАЕТСЯ «ОТКРЫТИЕ»?

Иногда — просто с удавшейся попытки угадывания ожидаемого результата «по аналогии», например, как в этот раз.

Полагаю, вам знакомы такие формулы, справедливые для любого натурального n :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}, \quad (1)$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad (2)$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}. \quad (3)$$

Сколько ни вглядывайся в правую часть этих трех равенств, вряд ли обнаружишь какую-либо закономерность в их формировании, чтобы угадать «по аналогии» вид правой части для суммы четвертых степеней тех же чисел:

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = ? \quad (4)$$

Но посмотрите, как изменяется ситуация, если я, используя символ C_n^m , придам другой вид формулам (1), (2), (3). Символом C_n^m ($n \geq m$) заменяют громоздкое выражение вида $\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}{m(m-1)(m-2) \dots 2 \cdot 1}$.

Например, $C_{n+1}^2 = \frac{(n+1)n}{2 \cdot 1}$ — правая часть формулы (1),
 $C_{n+1}^3 + C_{n+2}^3 = \frac{(n+1)n(n-1)}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{(n+2)(n+1)n}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ —
 правая часть формулы (2).

Убедитесь самостоятельно в том, что и для правой части формулы (3) имеет место равенство: $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = C_{n+1}^4 + 4 \cdot C_{n+2}^4 + C_{n+3}^4$, и «старые» формулы (1), (2), (3) представят перед вами в качественно новом виде:

$$1 + 2 + \dots + n = C_{n+1}^2,$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = C_{n+1}^3 + C_{n+2}^3,$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = C_{n+1}^4 + 4 \cdot C_{n+2}^4 + C_{n+3}^4.$$

Примечание. Чтобы формула, содержащая символ C_n^m , не теряла общности для значений $n < m$, следует полагать в этом случае $C_{n(n < m)}^m = 0$.

Теперь просматривается некоторая системность в формировании правой части рассматриваемых формул, дающая нам достаточные основания предположить «по аналогии», что формула для суммы четвертых степеней n первых натуральных чисел имеет вид:

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = C_{n+1}^5 + a \cdot C_{n+2}^5 + b \cdot C_{n+3}^5 + C_{n+4}^5 \quad (4)$$

При каких значениях коэффициентов a и b формула (4) станет искомым тождеством?

БЫСТРАЯ ФАБРИКАЦИЯ ПИФТРИАД

Тройка (триада) упорядоченных, обычно — целых — положительных чисел (a, b, c) называется пифагоровой тройкой, если $a^2 + b^2 = c^2$.

Узнаете знаменитую теорему Пифагора?

Простейшая пифтройка $(3, 4, 5)$ — стороны «египетского» треугольника, который исторически справедливее именовать «индийским».

Пифтройку называют примитивной, если a, b, c — взаимно простые числа, то есть не имеют общего делителя отличного от единицы. Удовольствие доставляет обычно сам процесс изготовления пифтроек собственного производства. Предложу несложную, достаточно симпатичную программу действий: назначьте произвольно выбранное вами четное число значением z и вычислите значение $\frac{z^2}{2}$; любой множитель числа $\frac{z^2}{2}$ назначьте значением x и введите число $y = \frac{z^2}{2x}$. Тогда

$$\begin{cases} a = x + z \\ b = y + z \\ c = x + y + z \end{cases} \quad \text{— пифагорова тройка.}$$

Действительно, имеем: $(x + z)^2 + (y + z)^2 = (x + y + z)^2$.

Примеры.

1. Назначаем $z = 2$, тогда $\frac{z^2}{2} = 2$. Множители: 1 и 2. Пусть $x = 1$, тогда $y = 2$ и $a = 3, b = 4, c = 5$ — с детства знакомая пифтройка. Если же $x = 2$, то $y = 1$ и получаем ту же тройку.

2. Назначаем $z = 4$, тогда $\frac{z^2}{2} = 8$. Множители: 1, 2, 4, 8. Пусть $x = 1$, тогда $y = 8$ и $a = 5, b = 12, c = 13$. Если $x = 2, y = \frac{16}{2 \cdot 2} = 4$, то $a = 6, b = 8, c = 10$ не примитивная.

3. Назначаем $z = 6$, тогда $\frac{z}{2} = 18$. Множители: 1, 2, 3, 6, 9, 18. При $x = 1$, $a = 7$, $b = 24$, $c = 25$. При $x = 2$, $a = 8$, $b = 15$, $c = 17$.

Остальные множители: 3, 6, 9, 18 производят не примитивные тройки.

Вообще же пифтройка $(x + z, y + z, x + y + z)$ оказывается примитивной в том и только в том случае, когда x и y — взаимно простые числа.

В этом утверждении высказаны сразу две теоремы: прямая и обратная. Приверженцев математической строгости не буду лишать удовольствия самостоятельно доказать обе теоремы.

А НУ-КА ДЕВУШКИ, А НУ-КА МАЛЬЧИКИ!

Как хорошо, что есть на белом свете дотошно-любопытные человечки (и малые, и взрослые). Такому человечку мало того удовольствия, которое испытывает он от погружения в безбрежный океан наших «завлекалок», — он еще стремится и сам подметить что-нибудь упущенное.

Предположим, мы, по только что (выше) изложенной программе, наработали комплект пифагоровых троек (a, b, c) — с нечетным катетом a : (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41) — кучка I, и четно-четным (кратным 4) катетом a : (4, 3, 5), (8, 15, 17), (12, 35, 37) — кучка II.

Казалось бы, что в них особенного, кроме легко наблюдаемого постоянства разностей: $c - b = 1$ в кучке I и $c - b = 2$ в кучке II.

А от внимания дотошного человечка не ускользнули еще два вида любопытных соотношений:

для кучки I: $3^2 = 4 + 5$, $5^2 = 12 + 13$, $7^2 = 24 + 25$, $9^2 = 40 + 41$ и т.д.,

для кучки II: $4^2 = 2(3 + 5)$, $8^2 = 2(15 + 17)$, $12^2 = 2(35 + 37)$ и т.д.

В скобках сумма двух последовательных нечетных чисел.

А ну-ка, мальчики, а ну-ка, девочки — докажите, что подмеченные соотношения — не случайность, а закономерность.

В случае затруднений, нашу подсказку найдете на с. 443.

Более того, в этих соотношениях таится еще один ключ к фабрикации пифтроек в любом количестве.

Программа: принять любое нечетное число значением a и его квадрат представить суммой двух последовательных чисел — легко выполняется «в уме» — получившиеся слагаемые и есть b и c .

Например,

$$15 \rightarrow 225 = 112 + 113 \rightarrow (15, 112, 113);$$

или — иначе: принять значением a любое четно-четное число, то есть кратное 4, и половину его квадрата представить суммой двух последовательных нечетных чисел (b и c).

Например, $16 \rightarrow 256 \rightarrow 128 = 63 + 65 \rightarrow (16, 63, 65)$.

Легко и изящно!

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КВАРТЕТЫ

Возьмите любую пифагорову триаду, то есть три натуральных числа a, b, c , удовлетворяющих равенству $a^2 + b^2 = c^2$ и сформируйте из них два числовых квартета: (A, B, C, D) и (E, F, G, H) , где

$$A = \frac{b+a+1}{2}, \quad B = \frac{b-a+1}{2}, \quad C = D = \frac{c-1}{2},$$

$$E = \frac{b+a-1}{2}, \quad F = \frac{b-a-1}{2}, \quad G = H = \frac{c+1}{2},$$

тогда окажется, что

$$A + B + C + D = E + F + G + H$$

и

$$A^3 + B^3 + C^3 + D^3 = E^3 + F^3 + G^3 + H^3. \quad (*)$$

Например, имеем: $8^2 + 15^2 = 17^2$, тогда

$$12 + 4 + 8 + 8 = 11 + 3 + 9 + 9$$

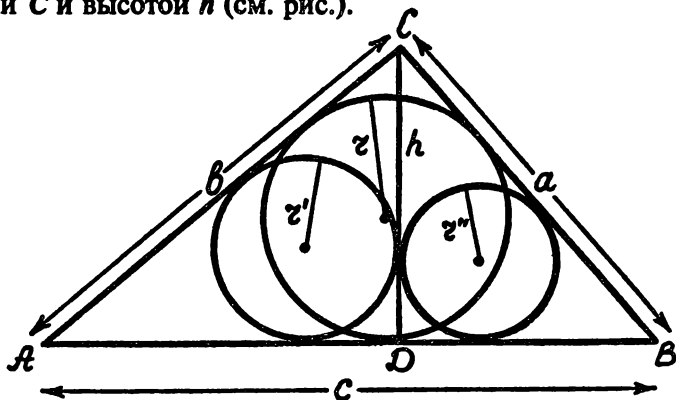
и

$$12^3 + 4^3 + 8^3 + 8^3 = 11^3 + 3^3 + 9^3 + 9^3.$$

Выясните: чем еще примечательны оба эти квартета в случае, когда исходная триада (a, b, c) такова, что $c - b = 1$? Испытайте, например, триаду $(5, 12, 13)$.

ТРИ РАДИУСА В ОДНОЙ «УПРЯЖКЕ»

Геометрическим образом любой пифагоровой триады — с целыми или не целыми числами a, b, c — является прямоугольный треугольник ABC с катетами a, b , гипотенузой C и высотой h (см. рис.).



«В одну телегу впрячь не можно
Коня и трепетную лань».

Но, если «конь» — высота h , а «трепетные лани» — три радиуса: r, r', r'' окружностей, вписанных в прямоугольные треугольники ABC, ACD, BCD , то образуется отличная «упряжка»:

$$h = r + r' + r''.$$

Вы легко, красиво докажете справедливость этого равенства, если предварительно убедитесь, что в любом прямоугольном треугольнике:

$$2r = a + b - c,$$

где r — радиус вписанной окружности, a , b — катеты и c — гипотенуза.

ТОЛЬКО ЕДИНИЦЫ НАМ И НЕ ХВАТАЛО

Действительно, к произведению любых четырех последовательных натуральных чисел прибавьте 1 — непременно получится квадратное число:

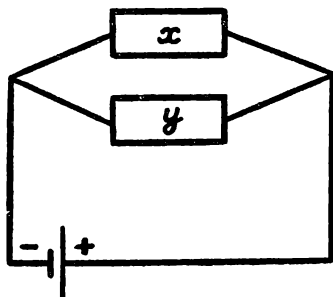
$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = k^2.$$

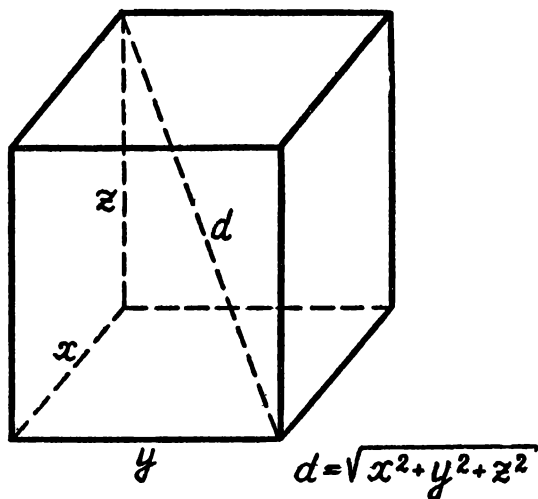
Примеры:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 &= 121 = 11^2, \\ 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 1 &= 1681 = 41^2, \\ 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 1 &= 11881 = 109^2. \end{aligned}$$

НЕОЖИДАННОЕ РОДСТВО ТРЕХ РАЗНЫХ ЗАДАЧ

Первая — из электротехники: какие натуральные значения надо придать сопротивлениям x и y , чтобы сопротивление z цепи (см. рис.), вычисляемое по формуле $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$, также было натуральным числом?

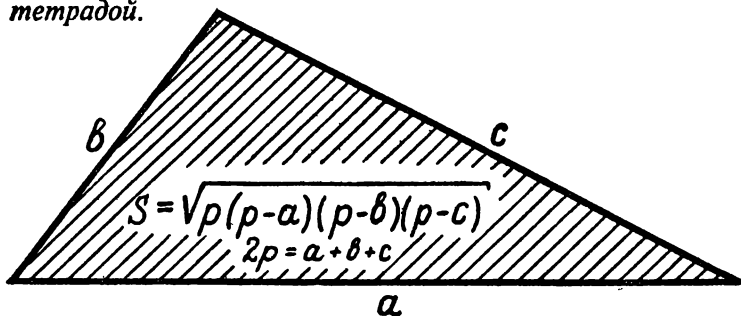




Это — просто! Очевидное тождество $\frac{1}{m(m+n)} + \frac{1}{n(m+n)} = \frac{1}{mn}$ — вот ваш «компьютер», дающий кучу искомых значений: $x = m(m+n)$, $y = n(m+n)$, $z = mn$, где m и n — произвольные натуральные числа.

Вторая и третья — геометрические. а) При каких целочисленных значениях x , y , z ребер прямоугольного параллелепипеда (рис. вверху) будет целочисленной и его диагональ d ?

б) При каких целочисленных значениях сторон a , b , c треугольника (рис. внизу) будет целочисленной и его площадь S ? Четверку таких чисел a , b , c , S называют *героновой тетрадой*.



Алгебраические связи между искомыми значениями x , y , z и a , b , c различны в этих трех задачах (см. рисунки на с. 426). Казалось, каждая потребует отдельной «программы» для нашего воображаемого компьютера. Но... сработала мысль и смекалка учителя математики А.А. Сапожкова, и возникла красивая «программа» — одна для всех трех задач:

Пусть $z = n$ — любое натуральное число и $x = n + \alpha$, $y = n + \beta$, где α и β — любая пара множителей числа n^2 , ($n^2 = \alpha \cdot \beta$).

Теперь имеем (в натуральных числах):

$$1) \frac{1}{n+\alpha} + \frac{1}{n+\beta} = \frac{1}{n},$$

$$2) d = n + \alpha + \beta,$$

$$3) a = y^2 + z^2, b = x^2 + z^2, c = x^2 + y^2,$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = d^2, S = x \cdot y \cdot z \cdot d.$$

Не сомневаюсь, что вы с удовольствием самостоятельно убедитесь в справедливости равенств 1 — 3 на частных примерах и в общем виде.

Еще одной — собственного сочинения — задачей А.А. Сапожков возвращает нас к давно забытой форме стихотворного сюжета:

Сто три корзины вишенок на складе,
Да квадрат телят в квадрате
Составляют два миллиона, —
Для продажи на рынке района.
Сколько вишенок в корзину сложено
И телят продать положено?

(Подразумевается, видимо, что в каждой корзине одинаковое количество вишенок.)

В переводе на язык алгебры предлагается решить уравнение

$$x^4 + 103y = 2\,000\,000.$$

ФЕНОМЕНЫ СРЕДИ КВАДРАТНЫХ ЧИСЕЛ

Казалось бы, что особенного в числах 81, 3025, 88209, 23804641, кроме того, что они квадраты: $81 = 9^2$, $3025 = 55^2$, $88209 = 297^2$, $23804641 = 4879^2$? Но... разламываю каждое число на два кусочка с одинаковым количеством цифр в каждом кусочке (так как в третьем числе — нечетное количество цифр, то приписываю нуль первой цифрой слева) и ... делаю открытие красивой закономерности: $8|1 = (8 + 1)^2$, $30|25 = (30 + 25)^2$, $088|209 = (088 + 209)^2$. Далее — стоп? Ведь, $2380|4641 \neq (2380 + 4641)^2$. Нет, не стоп, и это число — не пасынок в семействе «квадратных феноменов»! Маленькая хитрость: приписываю два нуля слева, и тогда: $00238|04641 = (00238 + 04641)^2$.

Чувствую, вам не терпится узнать: как я нашел эти числа и насколько обширно их «семейство»?

Первые два — случайно: результат наблюдательности. Далее, естественно, следовало привлечь средства всемогущей математики.

Пусть a — первая «половинка» каждого искомого числа, b — вторая. Тогда $10^k a + b$, $k = 1, 2, 3, \dots$ — искомое число, и подмеченное свойство отображается уравнением

$$10^k a + b = (a + b)^2, \quad (*)$$

a и b — целые положительные числа, причем $a < 10^k$.

Пусть $a + b = x$ (1), тогда $10^k a + b = x^2$, или $10^k a + b - x = x^2 - x$, или, учитывая (1), $10^k a - a = x(x - 1)$ и, наконец,

$$(10^k - 1)a = x(x - 1). \quad (**)$$

При всяком фиксированном k , одно решение очевидно: $x = 10^k - 1$, $a = 10^k - 2$, $b = x - a = 1$. Искомое число: $(10^k - 1)^2$.

Не годится принять $x - 1 = 10^k - 1$, $x = a$, так как имели бы $a = 10^k$, что недопустимо. Для отыскания других решений уравнения (**) надо найти все взаимно простые делители числа $10^k - 1$, объединить их в пары вида (d_1, d_2) , затем

положить $x = pd_1$, $x - 1 = qd_2$, так же и наоборот: $x = pd_2$, $x - 1 = qd_1$ и решить в целых числах образующееся линейное уравнение относительно p и q .

При $k = 1$, $10^k - 1 = 9$ — не имеет ни одной пары взаимно простых делителей и потому в этом случае образуется единственный квадратный феномен: $81 = (8 + 1)^2$.

При $k = 2$, имеем $99a = x(x - 1)$, $a < 100$. Очевидное решение $x = 99$, $a = 98$, $b = 1$. Искомое число: $9801 = (98 + 01)^2$.

Число 99 имеет одну пару взаимно простых делителей: 9 и 11. Полагаем $x = 9p$, $x - 1 = 11q$, $p, q \in \mathbb{N}$. Исключая x , получим систему:

$$\begin{cases} 9p - 1 = 11q \\ a = p \cdot q \quad (< 100). \end{cases}$$

Единственно пригодные значения: $p = 5$, $q = 4$, что дает: $a = 20$, $x = 45$, $b = x - a = 25$ и искомое число: $2025 = (20 + 25)^2$.

Теперь полагаем $x = 11p$, $x - 1 = 9q$. При $p = 5$ и $q = 6$ имеем: $a = p \cdot q = 30$, $x = 55$, $b = 25$. Искомое число: $3025 = (30 + 25)^2$.

Итого, при $k = 2$ существует всего три (вообще, $2^r - 1$, где r — количество взаимно простых делителей числа $10^k - 1$) квадратных феномена: 9801, 3025 и 2025.

При $k = 3$, $10^k - 1 = 999$ обладает также единственной парой взаимно простых делителей: 27 и 37. Следовательно, и в этом случае существуют только три квадратных феномена. В их числе — очевидное: $998001 = (998 + 001)^2$ и еще два: $494209 = (494 + 209)^2$ и $88209 = (088 + 209)^2$, возникающие в результате решения уравнения

$$999a = x(x - 1), \quad a < 10^3.$$

Докажите, что в каждом из следующих случаев: $k = 4$ и $k = 5$ существует по 7 квадратных феноменов, и найдите их.

Найдены и кубические феномены такой же структуры (см. с. 447).

Курьезы гипотенузы

Для подбора натуральных значений длин катетов a , b и гипотенузы c известны формулы:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2,$$

где m и n — произвольно назначаемые целые числа.

Однажды Шустрик полюбостыствовал: какими будут a , b и c , если m всякий раз будет на 1 больше чем n . Получилась таблица:

n	m	a	b	c
1	2	3	4	5
2	3	5	12	13
3	4	7	24	25
4	5	9	40	41
5	6	11	60	61

И вот тут наш любитель необычайных и курьезных соотношений сделал свое очередное «открытие». Он обнаружил, что если в каждой строке полагать n и m цифрами двузначного числа в системе счисления с основанием a , то число $(nm)_a$, выраженное в десятичной системе, как раз даст гипотенузу c , то есть $(nm)_a = nm = c$.

В самом деле,

$$(12)_3 = 1 \cdot 3 + 2 = 5,$$

$$(23)_5 = 2 \cdot 5 + 3 = 13,$$

$$(34)_7 = 3 \cdot 7 + 4 = 25,$$

$$(45)_9 = 4 \cdot 9 + 5 = 41,$$

$$(56)_{11} = 5 \cdot 11 + 6 = 61$$

и т.д.

ДВЕ ФОТОГРАФИИ ТРЕХ СРЕДНИХ

Пусть a и b — произвольные положительные числа. Тогда

$$\frac{a+b}{2} — \text{среднее арифметическое чисел } a \text{ и } b, \quad (1)$$

$$\sqrt{ab} — \text{среднее геометрическое чисел } a \text{ и } b, \quad (2)$$

$$\frac{2ab}{a+b} — \text{среднее гармоническое чисел } a \text{ и } b. \quad (3)$$

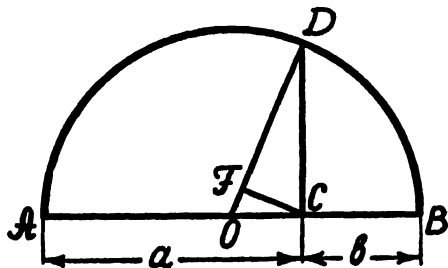
Сразу замечаем, что

а) Среднее гармоническое равно отношению квадрата среднего геометрического к среднему арифметическому.

б) Число, обратное среднему гармоническому: $\frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, есть среднее арифметическое чисел, обратных числам a и b .

Почему числа $\frac{a+b}{2}$ и \sqrt{ab} так названы — ясно: (1) — средний член из трех: a , $\frac{a+b}{2}$, b , образующих арифметическую прогрессию (последовательность чисел с одной и той же разностью между любым членом последовательности и предыдущим); (2) — средний член из трех: a , \sqrt{ab} , b , образующих геометрическую прогрессию (последовательность чисел с одним и тем же отношением любого члена последовательности к его предыдущему).

Термин «среднее гармоническое» имеет, несомненно, какое-то касательство к музыке, но об этом позже. А сначала пофантазируем: какие отрезки и на каком «фоне» явились бы подходящими «фотографиями» (геометрической интерпретацией) этих трех знаменитых «средних».



Можно предложить две «фотографических карточки»: одну на «фоне» окружности, другую — на «фоне» трапеции.

Первая. Пусть $AC = a$, $CB = b$, $AB = a + b$ — длина диаметра окружности O (рис. на с. 431).

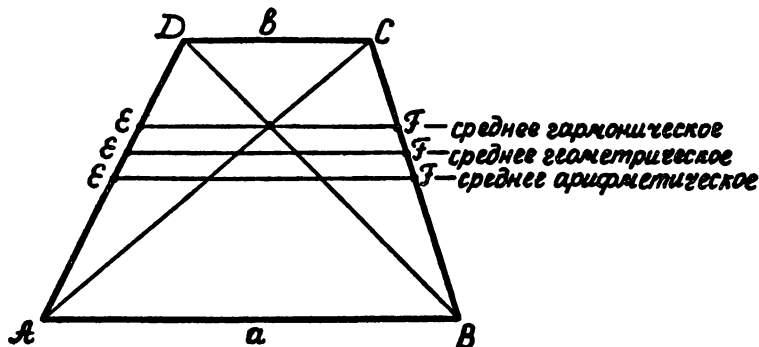
Тогда любой отрезок, равный радиусу окружности, например OD , где $OD = \frac{a+b}{2}$, изображает среднее арифметическое, DC , где $DC = \sqrt{ab}$ — среднее геометрическое, и DF , где $DF = \frac{2ab}{a+b}$ — среднее гармоническое чисел a и b .

Доказательство нетрудно выполнить самостоятельно, равно как и убедиться в том, что

$$CD^2 = OD \cdot DF.$$

Последнее равенство рассказывает о любопытной связи между тремя «средними»: *среднее геометрическое двух положительных чисел является средним геометрическим между их средним арифметическим и средним гармоническим.*

Вторая. Для получения второго «фотоснимка средних» (тоже красивая интерпретация) изобразим трапецию $ABCD$ (см. рис. внизу) и проведем $EF \parallel AB \parallel CD$. Пусть $AB = a$, $DC = b$, тогда, если EF — средняя линия трапеции, то EF — среднее арифметическое чисел a и b . Это очевидно. Если же EF делит трапецию на две подобные фигуры, то EF — среднее геометрическое чисел a и b . Наконец, если EF проходит через точку пересечения диагоналей трапеции, то EF — «фотография» среднего гармонического чисел a и b .



Доказательство этих утверждений — хорошая геометрическая задача для самостоятельного решения.

Есть много красивых тождеств и тождественных неравенств, относящихся к этим «средним». Одно из них: n -я степень среднего арифметического двух положительных чисел всегда меньше суммы n -х степеней этих чисел, $n \in N$.

Доказывается обычно «по индукции», но проще так: пусть $a > 0$, $b > 0$, тогда $a < \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $b < \sqrt[n]{a^n + b^n}$, откуда $a + b < 2 \sqrt[n]{a^n + b^n}$, то есть $\frac{a+b}{2} < \sqrt[n]{a^n + b^n}$, откуда

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < a^n + b^n.$$

Теперь для вас одна поисковая задача. Беру два натуральных числа: $a = 8$, $b = 24$. Нахожу среднее гармоническое: $\frac{2ab}{a+b} = 12$ — удача: тоже натуральное число! Еще для каких натуральных значений a и b их среднее гармоническое есть натуральное число?

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И МУЗЫКАЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

Напишем подряд a , $\frac{2ab}{a+b}$, b и буквам a , b придадим значения: $a = \frac{1}{n}$, $b = \frac{1}{n+2}$, $n \in N$. Тогда среднее гармоническое $\frac{2ab}{a+b}$ примет значение $\frac{1}{n+1}$. Образовались три члена последовательности

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+2}, \quad \dots$$


Последовательность такого вида называется *гармонической*.


Соединяя члены последовательности знаком «+» и полагая $n = 1$, получим числовой ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (n \in N),$$

который называется *гармоническим* рядом. Каждый член этого ряда есть среднее гармоническое между предыдущим и последующим его членами.

Одна из особенностей этого ряда состоит в том, что отношения соседних членов ряда почти точно характеризуют музыкальные интервалы. Если колеблющаяся струна длины l дает некоторый определенный тон, например,

звучит как «до»: , то струна длины $\left(\frac{1}{2} : 1\right) l = \frac{1}{2}l$ дает

верхнюю октаву для этого тона: ; струна длины $\left(\frac{1}{3} : \frac{1}{2}\right) l = \frac{2}{3}l$ — квинту, то есть в нашем примере зазвучит как

«соль»: ; струна длины $\left(\frac{1}{4} : \frac{1}{3}\right) l = \frac{3}{4}l$ — верхнюю

кварту (до-фа): ; струна длины $\left(\frac{1}{5} : \frac{1}{4}\right) l$ — большую

терцию (до-ми): ; струна длины $\left(\frac{1}{6} : \frac{1}{5}\right) l$ — малую

терцию (до-ми бемоль): 

Предлагается решить следующие задачи:

1. Доказать, что для всех целых $n > 1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} > 1.$$

2. Доказать, что

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n} \rightarrow 2. \quad n \rightarrow \infty$$

РЯД ИЗ ЧИСЕЛ, А САМ — НЕ ЧИСЛО

Суть этого интригующего утверждения в следующем:
Пусть задана числовая последовательность

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

Это значит, что каждому натуральному n поставлено в соответствие число u_n . Выражение

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

составленное из членов последовательности, называется *числовым рядом*, а n -й член последовательности, u_n — *общим членом ряда*.

Общий член гармонического ряда $u_n = \frac{1}{n}$. Всякий заданный числовой ряд (1), в свою очередь, порождает новую числовую последовательность (S_n) , где

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots, \\ S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \dots$$

Ее называют *последовательностью частичных сумм ряда*.

Если последовательность (S_n) сходится к какому-либо числу S , то есть, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то говорят, что ряд (1)

сходится, а число S называют *суммой* этого ряда. Так устанавливается понятие суммы бесконечного ряда.

В свою очередь, всякий сходящийся ряд можно понимать как некоторое разложение числа, к которому ряд сходится.

Если же (S_n) не имеет предела, то соответствующий ряд называется *расходящимся*. Расходящийся ряд приходится воспринимать как абстрактное выражение, не представляющее никакого числа.

Именно таков гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ составлен из чисел, а сам — не число, так как является расходящимся рядом: складывая достаточно много его членов, сумму можно довести до сколь угодно большого числа.

Если интересует доказательство утверждения о расхождении гармонического ряда, а собственные усилия не привели к успеху, — загляните в учебник или справочник.

А пока приглашаю испытать себя в решении довольно замысловатой задачи:

Дан ряд

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \dots + ax^n + bx^{n+1} + (a + b)x^{n+2} + \dots$$

Если при каких-либо значениях x ряд сходится к $S(x)$, то для данного ряда можно найти соответствующие значения S . Как?

ЧЕТЫРЕ «ОТКРЫТИЯ» В ОДНОЙ ГОЛОВОЛОМКЕ

Вначале для нас головоломка — это задача, решаемая методом «проб и ошибок» (иногда говорят — методом «тыка»), то есть своего рода математический эксперимент. Постепенно интерес смещается в направлении осмысливания математической сути решаемой задачи: не удастся ли придумать экономный алгоритм (программу действий), выяснить условия существования, условия единственности решения, возможность обобщения?

В этом качестве иные головоломки становятся крепкими орешками, раскусывание которых доставляет умственное наслаждение.

Раскусите такой «орешек» (если придется по вкусу):

Наберите k целых положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_k (не обязательно различных), сумма и произведение которых одинаковы; в краткой записи:

$$\sum_{i=1}^k x_i = \prod_{i=1}^k x_i.$$

Этап игры в угадывание

Задаем значения $k = 2, 3, \dots$ и угадываем подходящие значения x_1, x_2, \dots, x_k :

при $k = 2$ — только $2 + 2 = 2 \cdot 2$,

при $k = 3$ — только $3 + 2 + 1 = 3 \cdot 2 \cdot 1$,

при $k = 4$ — только $4 + 2 + 1 + 1 = 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$,

при $k = 5$ — два набора: $5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ и $3 + 3 + 1 + 1 + 1 = 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$, и т.д.

Продвинувшись, например, до $k = 25$ подмечаем, что только для $k = 2, 3, 4, 6, 24$ искомые наборы значений x_1, x_2, \dots, x_k — единственны. Для остальных значений $k \in [2; 25]$ удастся подобрать два и более комплектов решений. Например, при $k = 19$ выявляется, аж, четыре комплекта:

$$19 + 2 + 17 \text{ единиц} = 19 \cdot 2 \cdot 1^{17},$$

$$10 + 3 + 17 \cdot 1 = 10 \cdot 3 \cdot 1^{17},$$

$$4 + 7 + 17 \cdot 1 = 4 \cdot 7 \cdot 1^{17}.$$

$$3 + 2 + 2 + 2 + 15 \cdot 1 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1^{15}.$$

Этап наблюдений, размышлений и «открытий»

Выявляется очередная загадка натуральных чисел: действительно ли для любого натурального значения k существует хотя бы один набор искомых чисел и в чем секрет того, что для каких-то избранных значений k есть только один-единственный набор? Так, например, на отрезке $[2; 25]$ обнаруживаются их 5. А сколько таких значений k на отрезке $[25; 125]$?

Продуктом размышления и являются сразу четыре «открытия»:

1. Находим ответ на первый вопрос: да — для формирования искомого набора достаточно взять три числа: k , 2 и единицу, повторенную $(k - 2)$ раз. Назовем такой набор *стандартным*.

Действительно, при любом значении k имеем:

$$k + 2 + \underbrace{1 + \dots + 1}_{k-2 \text{ раз}} = k \cdot 2 \cdot \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{k-2 \text{ раз}}$$

2. Натуральные числа a , b и $(k - 2)$ единиц образуют по меньшей мере один нестандартный набор решений тогда и только тогда, когда $k - 1$ — *составное число* и

$$(a - 1)(b - 1) = k - 1 \quad (*)$$

Действительно, по условию должно быть

$$a + b + (k - 2) \cdot 1 = a \cdot b \cdot 1^{k-2}.$$

Преобразуем это выражение к виду $ab - a - b + 1 = k - 1$, откуда следует $(a - 1)(b - 1) = k - 1$.

3. Аналогично, a , b , 2 и $(k - 3)$ единиц образуют по меньшей мере один нестандартный набор решений всякий раз, когда $2k - 1$ — *составное число* и

$$(2a - 1)(2b - 1) = 2k - 1. \quad (**)$$

Доказательство, подобное предыдущему.

Замечание. Необходимое (но не достаточное) условие существования единственного (только стандартного) набора: $(k - 1)$ и $(2k - 1)$ — простые числа. Недостаточность этих признаков покажем на примере для $k = 12$. Имеем: $k - 1 = 11$ и $2k - 1 = 23$ — простые числа. Равенства $(*)$ и $(**)$ приводят только к стандартному набору.

Однако же и нестандартное решение формируется из четырех двоек и восьми единиц: $2 + 2 + 2 + 2 + 8 \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1^8$.

Здесь требуемое равенство формируется из четырех компонентов, отличных от единицы. Это наблюдение наводит нас на четвертое «открытие»:

4. Натуральные числа a , b , 2, 2 и $(k - 4)$ единиц образуют хотя бы один нестандартный набор решений всякий раз, когда $4k + 1$ — *составное число* и

$$(4a - 1)(4b - 1) = 4k + 1. \quad (***)$$

Доказательство. Требуется, чтобы

$$a + b + 2 + 2 + (k - 4) \cdot 1 = 4a \cdot b.$$

Упрощая, получим $4ab - a - b = k$. Умножив обе части равенства на 4, приводим его к виду $16ab - 4a - 4b + 1 = 4k + 1$, откуда $(4a - 1)(4b - 1) = 4k + 1$.

Замечание. Отмеченные выше необходимые признаки существования только стандартного набора (***) пополняются еще одним: $4k + 1$ — простое число.

Теперь, в поисках ответа на второй вопрос, для каждого значения $k \in [25; 125]$ вычислим значения выражений: $(k - 1)$, $(2k - 1)$, $(4k - 1)$, чтобы сразу исключить из рассмотрения те числа k , для которых хотя бы одно из этих трех выражений образовывало *составное число*. Например, сразу отбрасываем $k = 25, 26, 27, 28, 29$, так как для каждого из них $k - 1$ — составное число; отбрасываем $k = 30$, так как хотя $k - 1 = 29$ и $2k - 1 = 59$ — простые числа, но $4k + 1 = 121$ — составное.

Продолжая отсеивать, задержимся на числе 42. Здесь $k - 1 = 41$, $2k - 1 = 83$ — простые числа, $4k + 1 = 169 = 13 \cdot 13$ — составное, но равенство $(4a - 1)(4b - 1) = 13 \cdot 13$ верно лишь для дробных значений: $a = b = 3,5$.

Продолжая испытания, задержимся еще лишь на двух числах 84 и 114. Здесь $k - 1 = 83$ и 113, $2k - 1 = 167$ и 227, $4k + 1 = 337$ и 457 — простые числа.

Для $k = 114$, по-видимому, действительно возможен только один (стандартный) набор, а для $k = 84$, как и для $k = 42$ удастся вычислить (не угадать подбором, а именно — вычислить!) нестандартные наборы. Вот они: 8, 4, 3 и $(k - 3)$ единиц для $k = 84$; 3, 2, 2, 2, 2 и $(k - 5)$ единиц для $k = 42$.

Приглашаю к продолжению исследований:

а) Сделайте пятое «открытие» — установите условия, при которых комплект натуральных чисел a , b , 3 и $(k - 3)$ единиц давал бы нестандартные решения.

б) Разгадайте, как были найдены вышеуказанные комплекты нестандартных решений в случаях $k = 84$ и $k = 42$?



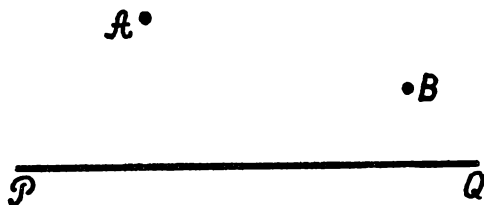
РЕШЕНИЯ

ГАРАНТИРОВАННАЯ ДЕЛИМОСТЬ

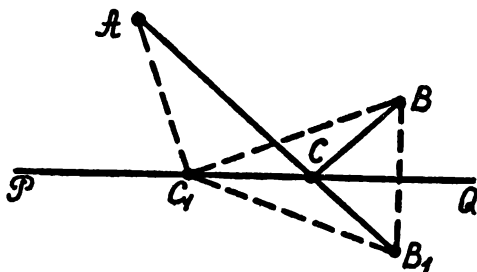
Пусть год рождения — четырехзначное число \overline{mnpq} , тогда $R-S = (1000m + 100n + 10p + q) - (m + n + p + q) = 999m + 99n + 9p$ кратно 9 всегда.

ПУТЬ ПОЗНАНИЯ УВЛЕКАТЕЛЕН, НО НЕ УСЫПАН РОЗАМИ

Конечно, решением задачи является только точка C (см. рис.) полученная в первом построении. Но логический



изъян в доказательстве состоял в том, что вместо особенностей интересующей нас суммы $AC + CB$ рассматривались особенности суммы $AC + CB_1$. Верно, что эти суммы равны, но в то время, как сумма $AC + CB_1$ при любом положении точки C на прямой PQ обеспечивает наименьшее расстояние между точкой A и точкой B_1 , лежащей на продолжении AC , сумма $AC + CB$ будет наименьшей не при любом рас-



положении точки C на прямой PQ . Вот это и надо доказывать. Надо, кроме первоначально полученной точки C , взять еще какую-либо точку C_1 на прямой PQ (см. рис.). Тогда

$$AC_1 + CB_1 > AB_1.$$

Но так как $BC_1 = C_1B_1$, то

$$AC_1 + C_1B = AC_1 + C_1B_1$$

и

$$AC_1 + C_1B > AB_1, \text{ или } AC_1 + C_1B > AC + CB.$$

Это и значит, что тропинка $AC + CB$ будет короче любой другой тропинки $AC_1 + C_1B$.

С ЧЕГО НАЧИНАЕТСЯ «ОТКРЫТИЕ»?

Возьмем частное значение $n = 2$ и запишем

$$1^4 + 2^4 = C_3^5 + a \cdot C_4^5 + b \cdot C_5^5 + C_6^5,$$

где $C_3^5 = 0$, $C_4^5 = 0$ (см. Примечание на с. 420).
Расшифруем:

$$C_5^5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1, \quad C_6^5 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6,$$

тогда $17 = b + 6$, откуда $b = 11$.

Аналогично, при $n = 3$ имеем:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 = C_4^5 + a \cdot C_5^5 + b \cdot C_6^5 + C_7^5.$$

Расшифровав символы $C_4^5 = 0$, $C_5^5 = 1$, $C_6^5 = 6$, $C_7^5 = 21$, получим $98 = a + 6b + 21$, где $b = 11$, откуда $a = 11$. Формула определилась:

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = C_{n+1}^5 + 11 \cdot C_{n+2}^5 + 11 \cdot C_{n+3}^5 + C_{n+4}^5.$$

Для доказательства тождественности, положите, например, $n = 4$, что и приводит к верному равенству $297 = 6 \cdot 11 + 21 \cdot 11$.

А НУ-КА, ДЕВУШКИ, А НУ-КА, МАЛЬЧИКИ!

Пусть a, b, c — пифагорова тройка. Имеем: $a^2 + b^2 = c^2$. Это равенство равносильно трем:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2,$$

где m, n — произвольные натуральные числа.

Если m и n таковы, что $m = n + 1$, то $a = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$ — нечетное число.

Докажем, что

1) $a^2 = b + c$, причем $c = b + 1$, но

2) $b^2 \neq a + c$ и

3) $c^2 \neq a + b$.

Доказательство.

$$1) \ a^2 = (m^2 - n^2)^2 = (m - n)^2(m + n)^2 = 1 \cdot (m + n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn = b + c,$$

$$b = 2mn = 2(n + 1)n =$$

$$= 2n^2 + 2n,$$

$$c = m^2 + n^2 = (n + 1)^2 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1,$$

$$\text{откуда } c = b + 1.$$

2) Допустим, что $b^2 = a + c$, тогда

$$4m^2n^2 = (m^2 - n^2) + (m^2 + n^2) = 2m^2,$$

откуда $2n^2 = 1$, что невозможно.

3) Доказательство аналогичное — «от противного».

Доказано, следовательно, что квадрат любого нечетного числа может быть представлен суммой двух последовательных чисел.

Доказательство подмеченного свойства в случае четного $a = 2mn$ аналогично, но, пользуясь тем, что m и n — произвольные натуральные числа, надо принять $n = 1$.

Оставляю его вам, как задание для самостоятельного выполнения.

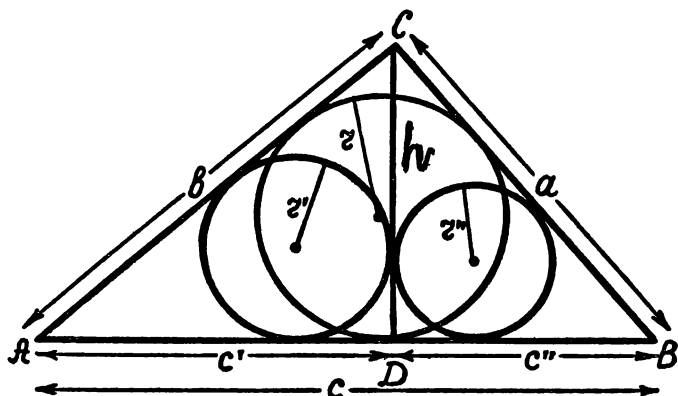
ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КВАРТЕТЫ

Если $c - b = 1$ (а триад с таким дополнительным свойством бесконечно много), то каждая из сумм (*) оказывается квадратным числом. В примере, где $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$, имеем:

$$\begin{aligned} 4 + 9 + 6 + 6 &= 3 + 8 + 7 + 7 = 25 = 5^2, \\ 4^3 + 9^3 + 6^3 + 6^3 &= 3^3 + 8^3 + 7^3 + 7^3 = 1225 = 35^2. \end{aligned}$$

ТРИ РАДИУСА В ОДНОЙ «УПРЯЖКЕ»

Полагаю, вы не только поверили, но и доказали самостоятельно справедливость утверждения, содержащегося в нашей подсказке (см. с. 425): диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен разности между суммой его катетов и гипотенузой.



Исходя из этого свойства, имеем (см. рис.):

$$\text{для треугольника } ABC: 2r = a + b - c,$$

$$\text{для треугольника } ACD: 2r' = c' + h - b$$

$$\text{для треугольника } BCD: 2r'' = c'' + h - a.$$

Складывая эти равенства и учитывая, что $c' + c'' = c$, получим $2(r + r' + r'') = 2h$, откуда $r + r' + r'' = h$.

ТОЛЬКО ЕДИНИЦЫ НАМ И НЕ ХВАТАЛО

Нетрудно проверить, что

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2.$$

НЕОЖИДАННОЕ РОДСТВО ТРЕХ РАЗНЫХ ЗАДАЧ

$$x^4 + 103y = 2 \cdot 10^6 = 2^7 \cdot 5^6 = 128 \cdot 25^3 = (25 + 103) \cdot 25^3 = 25^4 + 103 \cdot 25^3, \text{ откуда}$$

$$x = 25 \text{ и } y = 25.$$

ФЕНОМЕНЫ СРЕДИ КВАДРАТНЫХ ЧИСЕЛ

При $k = 4$ число $10^4 - 1 = 9999$ имеет три взаимно простых делителя: (9, 11 и 101) и, следовательно, существует $2^3 - 1 = 7$ квадратных феноменов, возникающих в результате решения уравнения $9999a = x(x - 1)$, $a < 10^4$.

Вот они:

$$04941729 = (0494 + 1729)^2,$$

$$07441984 = (0744 + 1984)^2,$$

$$24502500 = (2450 + 2500)^2,$$

$$25502500 = (2550 + 2500)^2,$$

$$52881984 = (5288 + 1984)^2,$$

$$60481729 = (6048 + 1729)^2,$$

$$99980001 = (9998 + 0001)^2.$$

При $k = 5$ взаимно простых делителей также 3 и, проявив достаточное вычислительное усердие, вы становитесь обладателем еще семи квадратных феноменов:

$$0023804641 = (00238 + 04641)^2,$$

$$0300814336 = (03008 + 14336)^2,$$

$$0493817284 = (04938 + 17284)^2,$$

$$6049417284 = (60494 + 17284)^2,$$

$$6832014336 = (68320 + 14336)^2,$$

$$9048004641 = (90480 + 04641)^2,$$

$$9999800001 = (99998 + 00001)^2.$$

Фальшивые нули впереди числа поставлены для того, чтобы сохранить сечение числа на две части с равным количеством цифр в каждой. Если действительно «аппетит приходит во время еды», то, надеюсь, вам придется по вкусу несколько примеров **КУБИЧЕСКИХ ФЕНОМЕНОВ**, расчленяющихся на 4 слагаемых с сохранением последовательности цифр (способ «добывания» их изобретайте, «рыцари» математики!):

$$109^3 = 1295029 = (1 + 29 + 50 + 29)^3,$$

$$143^3 = 2924207 = (2 + 92 + 42 + 07)^3,$$

$$153^3 = 3581577 = (3 + 58 + 15 + 77)^3,$$

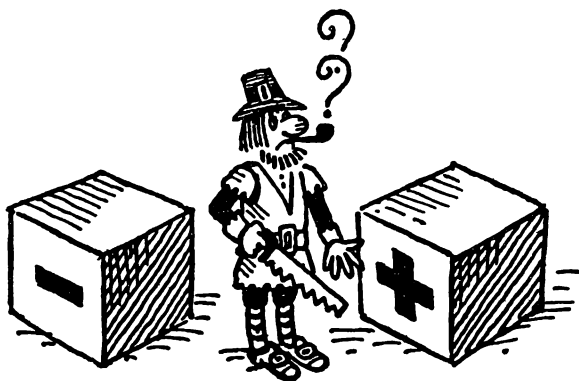
$$154^3 = 3652264 = (3 + 65 + 22 + 64)^3$$

и кубы трех последовательных чисел:

$$197^3 = 7645373 = (7 + 64 + 53 + 73)^3,$$

$$198^3 = 7762392 = (7 + 76 + 23 + 92)^3,$$

$$199^3 = 7880599 = (7 + 88 + 05 + 99)^3.$$



ДВЕ ФОТОГРАФИИ ТРЕХ СРЕДНИХ

Из $\frac{ab}{a+b} = n$ следует $ab - an - bn + n^2 = n^2$

или

$$(a - n)(b - n) = n^2.$$

Пусть $n^2 = u \cdot v$, тогда $a = n + u$, $b = n + v$. Полагаем последовательно: $n = 1, 2, 3, \dots$ и разлагаем n^2 на два целых неравных сомножителя.

Для $n = 1$ нет подходящих u и v .

Для $n = 2$ имеем $u \cdot v = 4$ откуда $u = 1$, $v = 4$ и, следовательно, $a = 3$, $b = 6$. Среднее гармоническое: $\frac{2ab}{a+b} = 4$.

Для $n = 3$ $u \cdot v = 9$, откуда $u = 1$, $v = 9$ и, следовательно, $a = 4$, $b = 12$, $\frac{2ab}{a+b} = 6$, и т.д.

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И МУЗЫКАЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

1. Заменяя все члены выражения $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2}$, кроме первого (то есть всего $n^2 - n$ членов), наименьшим из них, равным $\frac{1}{n^2}$, получим неравенство

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} (n^2 - n) = \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} = 1,$$

что и требовалось доказать.

2. Общий член $u_n = \frac{1}{1+2+\dots+n} = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$, откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) + \dots \rightarrow 2 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

РЯД ИЗ ЧИСЕЛ, А САМ — НЕ ЧИСЛО

Пусть x таково, что

$$S = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots. \text{ Тогда}$$

$$xS = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \dots,$$

$$x^2S = x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 + \dots \text{ и}$$

$$xS + x^2S = x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots = S - 1.$$

Образовалось равенство $xS + x^2S = S - 1$, откуда

$$S = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

ЧЕТЫРЕ «ОТКРЫТИЯ» В ОДНОЙ ГОЛОВОЛОМКЕ

а) По условию $a + b + 3 + (k - 3) \cdot 1 = 3ab$. Упрощая, получим: $3ab - a - b = k$. Умножим обе части равенства на 3 и прибавим по единице:

$$\begin{aligned} 9ab - 3a - 3b + 1 &= 3k + 1, \text{ откуда} \\ (3a - 1)(3b - 1) &= 3k + 1. \end{aligned}$$

Натуральные a и b , удовлетворяющие этому равенству в случаях, когда $3k + 1$ — составное число, образуют нестандартный комплект решений заданного вида.

б) В случае $k = 84$ имеем: $3k + 1 = 253 = 23 \cdot 11$.

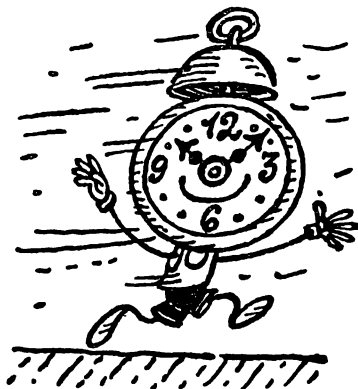
Пусть $3a - 1 = 23$ и $3b - 1 = 11$, тогда $a = 8$, $b = 4$ образуют нестандартный комплект: 8, 4, 3 и 81 единиц. Действительно, $8 + 4 + 3 + 81 = 8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1^{81}$.

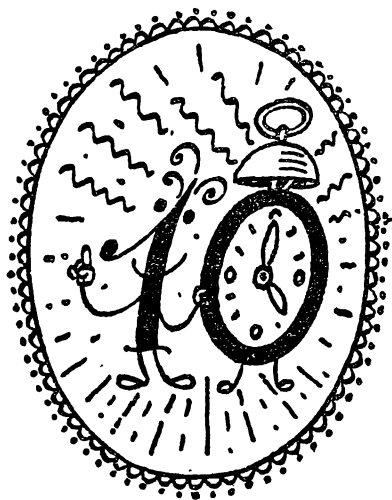
Для случая $k = 42$, как было показано (см. с. 439), непригодны комплекты видов a , b и $(k - 2)$ единиц, a , b , 2 и $(k - 3)$ единиц, a , b , 2, 2 и $(k - 4)$ единиц. Невозможен и вид a , b , 3 и $(k - 3)$ единиц, так как $3k + 1 = 127$ — простое число.

Надо предположить существование нового вида нестандартного комплекта решений, например, a , b , 2, 2, 2 и $(k - 5)$ единиц. Теперь должно выполняться равенство $a + b + 2 + 2 + 2 + (k - 5) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot b$, которое нетрудно привести к виду $(8a - 1)(8b - 1) = 8(k + 1) + 1$.

При $k = 42$ имеем: $8(k + 1) + 1 = 345 = 23 \cdot 15$. Если $8a - 1 = 23$ и $8b - 1 = 15$, то $a = 3$, $b = 2$. Искомый комплект: 3, 2, 2, 2, 2 и 37 единиц. Действительно,

$$3 + 2 \cdot 4 + 37 \cdot 1 = 3 \cdot 2^4 \cdot 1^{37}.$$





СЕМНАДЦАТЬ
МИНУТ
НАЕДИНУ
С МАТЕМАТИКОЙ

Тогда бы мог воскликнуть я:

«Мгновенье!

О, как прекрасно ты, повремени!

Воплощены следы моих борений

И не сотрутся никогда они».

И.В. Гете

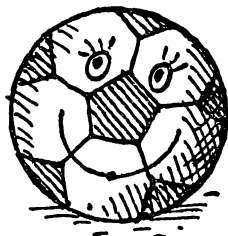
Это — 17 избранных задач, привлекающих скрытой в их содержании возможностью проявить находчивость и остроумие в подборе способов решения. К каждой задаче здесь же прилагается ее решение, претендующее на признание его красивым. Анализ такого решения и сопоставление с вашими собственными результатами представляет самостоятельный интерес.

Задача 1

Пройдя $\frac{3}{8}$ длины моста AB , человек услышал гудок автомобиля, приближающегося к мосту с постоянной скоростью 60 км/ч. Если он побежит обратно, то встретится с автомобилем в A , если побежит вперед, то автомобиль нагонит его в B .

Как быстро бежит этот человек?

Решение. $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ длины моста человек пробегает за такой промежуток времени, который нужен автомобилю, чтобы преодолеть всю длину моста. Следовательно, человек бежит со скоростью $\frac{1}{4} \cdot 60 = 15$ км/ч.



Задача 2

Из пункта A реки одновременно поплыли: мяч по течению и спортсмен против течения. Через 10 мин пловец повернул назад и догнал мяч под мостом, находящимся в 1 км от A . Известно, что пловец не изменял своих усилий на протяжении всего времени движения. Какова скорость течения реки?

Решение. Удобно предположить, что мяч покоится в пункте A , вода неподвижна, а мост подплывает к мячу со скоростью действительного течения реки. Если так, то спортсмен плывет 10 мин в одну сторону и столько же времени обратно (вода неподвижна), «догоняя» мяч в пункте A под мостом (по условию), который, следовательно, в это же мгновение должен подплыть к мячу. Значит, мост плыл со скоростью $1000 : 20 = 50$ м/мин. Это и есть скорость течения. А скорость пловца для решения задачи безразлична.

Задача 3

В колбе имеется раствор соли. Из колбы отливают $\frac{1}{n}$ часть раствора в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого получившийся раствор возвращают в колбу и смешивают с тем раствором, который там оставался. В результате содержание соли в растворе повысилось на p %. Каково процентное содержание соли в первоначальном растворе?

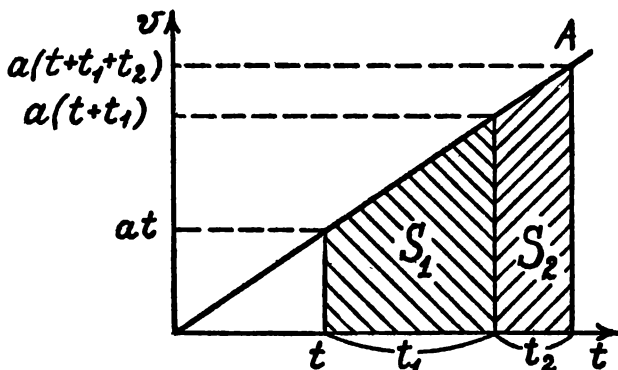
Решение. Пусть в первоначальном растворе содержится воды 1 ед. веса, раствора 1 ед. объема, а соли $\frac{x}{100}$ ед. веса, следовательно, $x\%$ как от объема раствора, так и от веса воды. Отлили $\frac{1}{n}$ ед. веса воды. Условие задачи будет выполнено в обоих смыслах процентного отношения, если уменьшим вдвое объем воды в пробирке (испаряется только вода). При смешивании растворов количество соли осталось прежним, следовательно,

$$\frac{x}{1 - \frac{1}{2n}} = x + p \Rightarrow x = p(2n - 1).$$

Задача 4

Студент, опоздавший к посадке на поезд, вбежал на платформу и, по привычке к лабораторным исследованиям, включив секундомер, определил, что предпоследний вагон прошел мимо него за время $t_1 = 10$ с, а последний — за $t_2 = 8$ с. Затем, считая движение поезда равноускоренным, вычислил время (t) своего опоздания.

С помощью графика зависимости скорости поезда v от времени t , он очень красиво и быстро решил свою задачу. Как?



Решение. В случае равноускоренного движения, скорость v пропорциональна времени t ; ускорение a — коэффициент пропорциональности, то есть имеем функцию $v = at$.

Пусть некоторая прямая OA — график этой функции (см. рис.). Обозначим длину одного вагона через l . Тогда $S_1 = S_2 = l$.

Приравнявая S_1 и S_2 , находим искомое время опоздания студента:

$$\frac{at + a(t + t_1)}{2} \cdot t_1 = \frac{a(t + t_1) + a(t + t_1 + t_2)}{2} \cdot t_2,$$

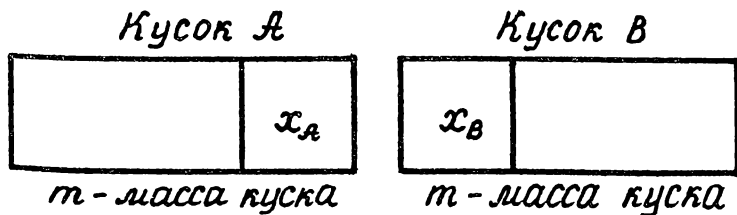
откуда

$$t = \frac{t_2^2 + 2t_1t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)} = 31 \text{ (с)}.$$

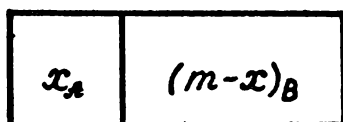
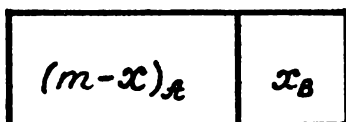
Задача 5

От двух кусков сплава одинаковой массы, но с различным процентным содержанием меди, отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплестили с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих кусках стало одинаковым. Во сколько раз масса отрезанного куска меньше массы целого куска?

Решение. Пусть массы кусков A и B представляют два равных прямоугольника (см. рис.). $x_A = x_B$ — массы отре-



занных частей кусков A и B . После сплавления получится:



Процентное содержание меди в кусках будет одинаковым лишь в том случае, когда

$$\begin{aligned} \frac{(m-x)_A}{x_A} &= \frac{x_B}{(m-x)_B} \Rightarrow \frac{m-x}{x} = \frac{x}{m-x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{m}{2} \Rightarrow m : \frac{m}{2} = 2. \end{aligned}$$

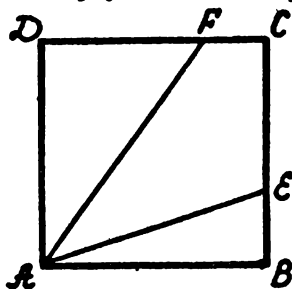
Ответ: в 2 раза.

Задача 6

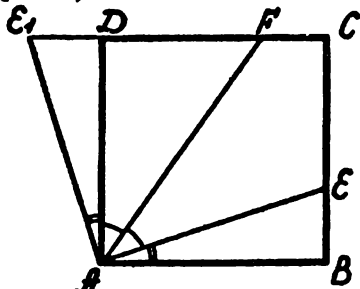
На стороне BC квадрата $ABCD$ отмечена буквой E произвольная точка (рис. а). Биссектриса угла DAE пересекает сторону CD в точке F .

Вычислить $BE + DF$, если $AE = a$.

Решение. Поворотом $R_A^{+90^\circ}$ отобразим треугольник ABE на треугольник $AD E_1$ (рис. б).



а)



б)

$$\angle AFD = \angle FAB = \angle FAE_1 \Rightarrow AE_1 = E_1F.$$

Из свойств поворота имеем:

$$\begin{aligned} AE &= AE_1, BE = DE_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow DF + BE &= DF + DE_1 = E_1F = AE_1 = AE = a. \end{aligned}$$

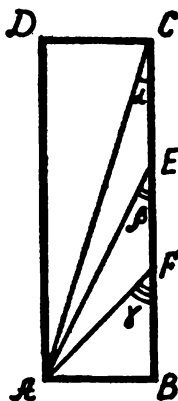
Ответ. $BE + DF = a$.

Задача 7

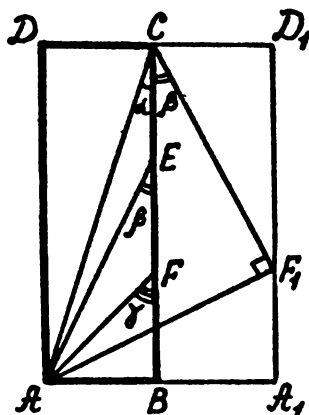
В прямоугольнике $ABCD$ (рис. а) имеем:
 $\frac{AB}{BC} = \frac{EC}{BC} = \frac{BF}{BC} = \frac{1}{3}$. Геометрически (не привлекая тригонометрические функции) доказать, что $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

Решение. Построим отрезок A_1D_1 , симметричный отрезку AD относительно BC (рис. б) и отложим $A_1F_1 = BF$.

Нетрудно установить теперь, что $\angle BCF_1 = \beta$, $CF_1 \perp BF_1$ и $AF_1 = CF_1$, значит треугольник AF_1C — равнобедренный прямоугольный, откуда $\alpha + \beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$ — следует сразу из условия, и, наконец, $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.



а)



б)

Задача 8

Очень много целочисленных значений x и y удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{1988} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

А сколько же все-таки — точно?

Решение. Приведем уравнение к виду $1988x + 1988y = x \cdot y$, или $(x - 1988) \cdot (y - 1988) = 1988^2$.

Так как $1988 = 2^2 \cdot 7 \cdot 71$, где 2, 7 и 71 — простые числа, то $1988^2 = 2^4 \cdot 7^2 \cdot 71^2$ и $x - 1988$ может содержать множители $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ (5 множителей) в комбинации с множителями $7^0, 7^1, 7^2$ (3 множителя) и $71^0, 71^1, 71^2$ (3 множителя). Это дает $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$ различных натуральных значений для числа $x - 1988$ или 90 различных целых значений этого числа.

Очевидно, заданному уравнению удовлетворяют все соответствующие значения, кроме $x = 0$. Соответствующие значения y определяются из равенства $y = \frac{1988^2}{x - 1988} + 1988$.

Значит, заданное уравнение имеет 89 решений в целых числах.

Задача 9

Доказать истинность неравенства

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}} + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \dots + \sqrt[3]{6}}} < 5.$$

Решение. Если последнюю цифру 6 в первом слагаемом заменить на 9, а во втором на 8, то после извлечения всех корней мы получим $3 + 2 = 5$. Следовательно, левая часть данного выражения меньше 5.

Задача 10

Теплоход отправился в дальний морской рейс. Когда он отошел от берега на расстояние 180 миль, за ним вылетел гидросамолет с экстренной почтой. Скорость гидросамолета в 10 раз больше скорости теплохода. На каком расстоянии от берега гидросамолет нагонит теплоход?

Решение. Так как скорость гидросамолета в 10 раз больше скорости теплохода, то 180 миль — это $\frac{9}{10}$ искомого пути S ; $S = 200$ миль.

Задача 11

Имеются два сплава серебра и золота: в одном количества этих металлов находятся в отношении 2 : 3, в другом — в отношении 3 : 7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором серебро и золото были бы в отношении 5 : 11?

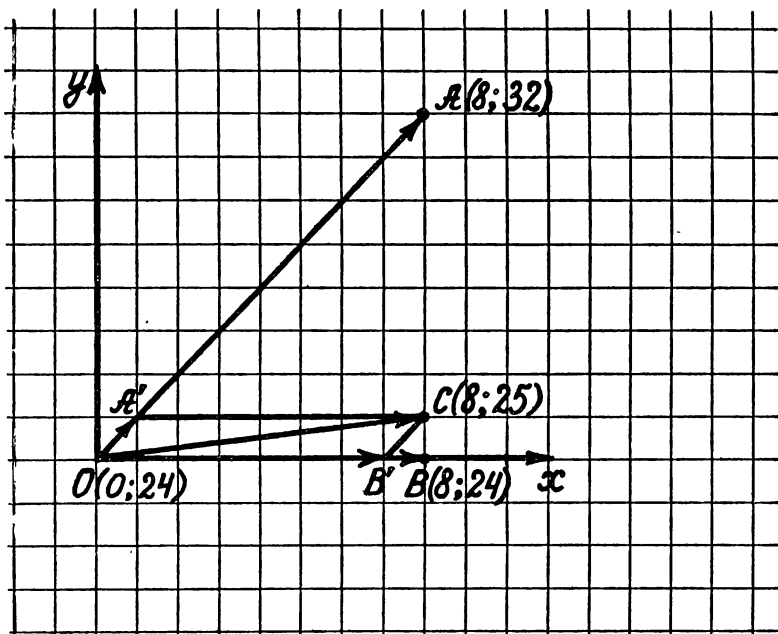
Решение. Каждый сплав характеризуется двумя числами: его весом (x) в килограммах и числом (y) весовых частей, например, серебра в данном количестве сплава. Значит, удобно считать математической моделью сплава вектор с координатами x, y . Доли серебра:

в I сплаве $2 : 5 = 32 : 80$,

во II сплаве $3 : 10 = 24 : 80$,

в новом сплаве $5 : 16 = 25 : 80$.

В соответствии с тем, что заданный вес составляемого сплава 8 кг, построим три вектора: $\overline{OA} (8; 32)$, $\overline{OB} (8; 24)$, $\overline{OC} (8; 25)$, пометив ординату начала координат не нулем, а числом 24 (см. рис.).



Выполняем разложение \overline{OC} на сумму $\overline{OC} = \overline{OA'} + \overline{OB'}$, где $\overline{OA'} \parallel \overline{OA}$ и $\overline{OB'} \parallel \overline{OB}$. Легко вычисляемые проекции векторов $\overline{OA'}$ и $\overline{OB'}$ на Ox дают ответ: надо взять 1 кг первого сплава и 7 кг второго.

Задача 12

Решить уравнение

$$\sqrt{x+5} = 5 - x^2.$$

Решение. Заданное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} (x+5)^2 = 25 - 10x^2 + x^4, \\ x+5 \geq 0, \\ 5-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^2 - (2x^2+1) \cdot 5 + (x^4-x) = 0, \\ -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}. \end{cases}$$

Теперь решим уравнение как квадратное относительно «переменного» 5:

$$5 = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x)}}{2} \iff 9 - 2x^2 = \pm(2x + 1).$$

Решая эти два квадратных уравнения относительно переменной x , находим корни заданного уравнения, принадлежащие отрезку $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}.$$

Задача 13

Функция f задана выражением

$$f(x) = 4(x^2 + a^2 + 1) - (x + a + 1)^2 - (x + a - 1)^2 - (-x + a + 1)^2 - (x - a + 1)^2.$$

Доказать, что $E(f)$ — область определения $f(x)$ — состоит из одного элемента. Какого?

Решение. $f'(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in D(f)$; имеем $f(x) = c$. Найдем c , например, как значение $f(a)$. Так как $f(a) = 0$, то $E(f) = 0$.

Задача 14

Упростить запись функции

$$F(x) = 4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - 1.$$

Решение. Воспользуемся тем, что всякая функция есть одна из первообразных для ее же производной.

$$f'(x) = 16(\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x) - \\ - 24(\sin^5 x \cos x - \cos^5 x \sin x) = 2\sin 4x.$$

Теперь запись любой из первообразных для $2\sin 4x$ имеет вид $-\frac{1}{2}\cos 4x + C$, C — произвольная постоянная. При некотором значении $C = C_1$ имеем $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 4x + C_1$. Найдем C_1 , полагая, например, $x = 0$. Так как $F(0) = -1$ и $\cos 0 = 1$, то $C_1 = -\frac{1}{2}$. Тогда $F(x) = -\frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$, или $F(x) = -\cos^2 2x$.

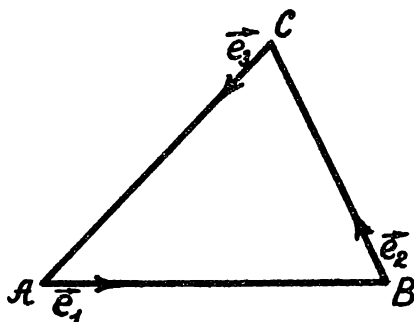
Задача 15

Доказать, что для всякого треугольника ABC :

а) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$;

б) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$.

Решение. а) Построим на сторонах треугольника единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (см. рис.). Очевидно, что



$$\begin{aligned}
 (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \geq 0 &\Rightarrow \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_1\vec{e}_2 + 2\vec{e}_2\vec{e}_3 + 2\vec{e}_1\vec{e}_3 \geq 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 1 + 1 + 1 + 2\cos(180^\circ - B) + 2\cos(180^\circ - C) + \\
 &+ 2\cos(180^\circ - A) \geq 0 \Rightarrow 3 - 2(\cos B + \cos C + \cos A) \geq 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

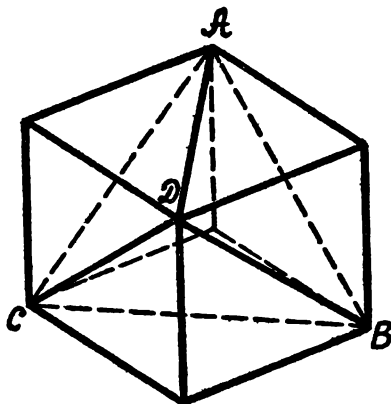
б) Рекомендация: воспользуйтесь неравенством

$$(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})^2 \geq 0,$$

где O — центр описанной окружности.

Задача 16

В куб размерами $1 \times 1 \times 1$ вложен тетраэдр $ABCD$ так, что все его 6 ребер являются диагоналями граней куба (см. рис.). Значит, длина каждого ребра тетраэдра равна $\sqrt{2}$. Чтобы найти объем этого тетраэдра, потребуется еще несколько шаблонно-вычислительных действий. При таком, по сути — алгебраическом, подходе к отысканию



объема тетраэдра исчезает красота и аромат геометрической задачи. Надо решить ее, используя только простые геометрические рассуждения и соотношения, не пользуясь при этом ни карандашом, ни бумагой, ни калькулятором, и ничего не достраивая на приведенном рисунке.

Решение. Представим, что тетраэдр удален из куба; останутся четыре равные треугольные пирамиды с вершинами в неотмеченных буквами вершинах куба (см. рис. на с. 463). Рассмотрим одну из них, образованную треугольником CBD и нижней вершиной куба.

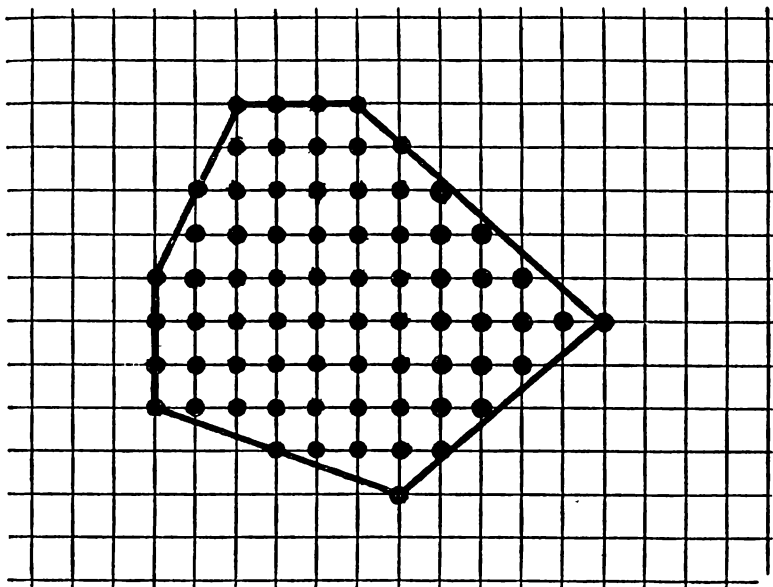
Основание пирамиды — треугольник (заштрихованный), площадь которого равна $\frac{1}{2}$ кв. ед., высота ее — ребро куба, следовательно, равна 1. Объем этой пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ куб. ед., а четырех таких пирамид — $\frac{2}{3}$ куб. ед. Следовательно, на долю тетраэдра остается $\frac{1}{3}$ куб. ед.

Задача 17. Площадь сада — по числу яблонь

При планировании посадок яблонь прямоугольный участок, отведенный под сад, был весь разделен на единичные квадраты. В каждую вершину каждого единичного квадрата (назовем их узловыми точками) высадили яблоню. Шло время. Изменилась форма периметра сада. Теперь очертание границ сада имеет форму многоугольника с вершинами в узловых точках (рис. на с. 465 вверху). В каждой узловой точке внутри многоугольника и на его границах растет яблоня.

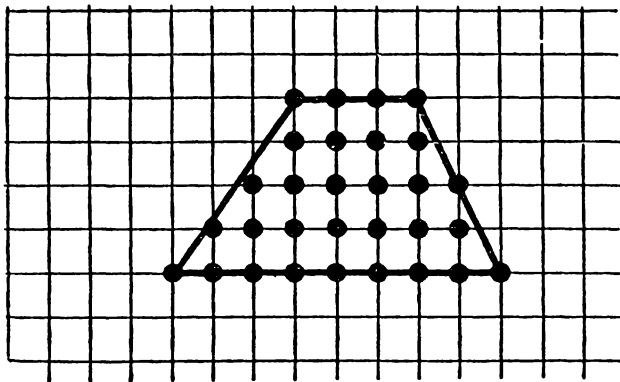
Школьники, приехавшие помогать сборщикам яблок, спросили садовода: «Как велика площадь яблоневого сада?» В ответ садовод предложил школьникам самим вычислить площадь сада по формуле

$$S = N - 1 + \frac{M}{2} \text{ (кв. ед.)},$$



где N — число яблонь внутри многоугольника, ограничивающего сад, M — число яблонь на его периметре, включая яблони, расположенные в вершинах многоугольника, а потом и вывести эту удивительную формулу.

Вечером, после работы, ребята убедились в правильности формулы на примере трапеции, нарисованной на клочке клетчатой бумаги (см. рис.), а рассмотрением общего случая решили заняться на школьном кружке.



Для трапеции получилось: $N = 16$, $M = 14$, откуда

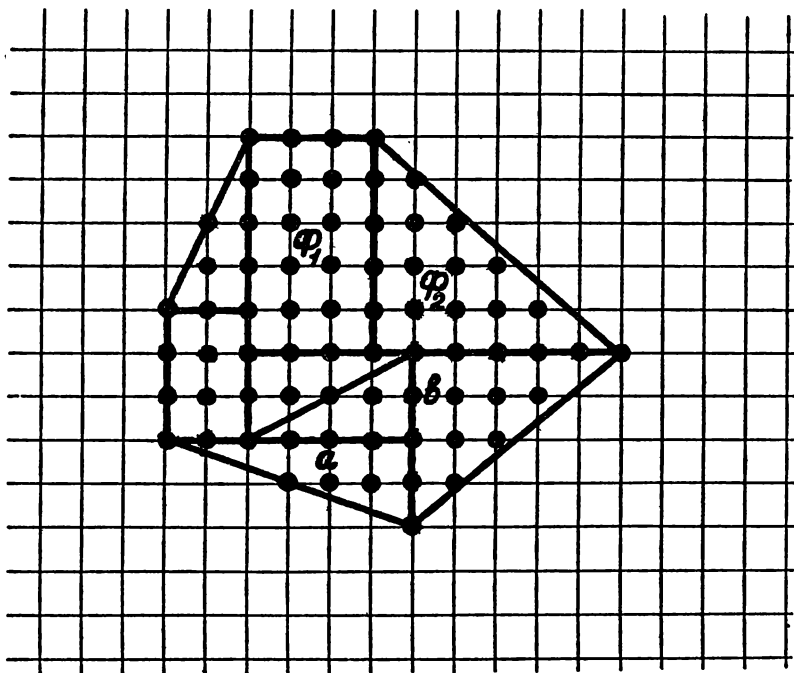
$$S = 16 - 1 + 7 = 22 \text{ (кв. ед.)}.$$

По формуле для площади трапеции:

$$S = \frac{a+b}{2}h, \quad S = \frac{3+8}{2} \cdot 4 = 22 \text{ (кв. ед.)}.$$

Решение. Выделим внутри многоугольника какой-либо прямоугольник с длинами сторон a и b , вершины которого — в узловых точках (см. рис.). Так как в каждой узловой точке — яблоня, то на границах выделенного прямоугольника находится $M = 2(a + b)$ яблонь, а внутри прямоугольника — $N = (a - 1) \cdot (b - 1)$ яблонь. Так как его площадь $S = a \cdot b$, то

$$S = N - 1 + \frac{M}{2} \text{ (кв. ед.)}. \quad (1)$$



Диагональю разобьем прямоугольник на два треугольника и предположим, что на отрезке гипотенузы растут С яблонь. В число С не будем включать яблони, расположенные на концах гипотенузы. Число Q яблонь внутри каждого из этих треугольников и число R яблонь на его границах равны соответственно

$$Q = \frac{N-C}{2} \quad \text{и} \quad R = \frac{M}{2} + 1 + C.$$

Выразим N и M и подставим в (1) — получим площадь треугольника

$$\frac{S}{2} = Q - 1 + \frac{R}{2}. \quad (2)$$

Получившаяся формула (2) имеет ту же структуру, что и формула (1).

Разобьем многоугольник на прямоугольники и прямоугольные треугольники с вершинами в узловых точках, и покажем, что для площади любой пары соприкасающихся фигур (Φ_1 и Φ_2), рассматриваемых как одна фигура (Φ), справедлива формула вида (1).

Пусть площади фигур Φ_1 и Φ_2 соответственно

$$S_1 = N_1 - 1 + \frac{M_1}{2} \quad \text{и} \quad S_2 = N_2 - 1 + \frac{M_2}{2},$$

где N_1 и N_2 — значения N , а M_1 , M_2 — значения M для этих фигур. Тогда площадь объединенной фигуры

$$S = S_1 + S_2.$$

Чтобы привести этот результат к виду (1), надо узловые точки (кроме крайних), принадлежащие линии соприкосновения фигур Φ_1 и Φ_2 , считать внутренними для Φ , а не периферийными, какими они были для Φ_1 и Φ_2 . Пусть таких точек k .

Это значит, что сумма ($N_1 + N_2$) внутренних для Φ узловых точек увеличится на k , то есть будет

$$N = N_1 + N_2 + k,$$

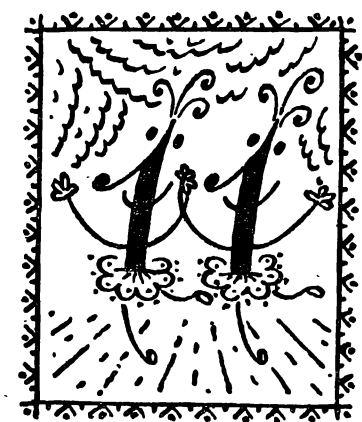
а сумма $(M_1 + M_2)$ периферийных для Φ узловых точек уменьшится на $(2k + 2)$, то есть будет

$$M = M_1 + M_2 - (2k + 2).$$

С учетом этого получим:

$$S = N_1 + N_2 - 2 + \frac{M_1 + M_2}{2} = N - k - 2 + \frac{M + 2k + 2}{2} = N - 1 + \frac{M}{2}.$$

Заключаем: формула (1) справедлива для площади всякого многоугольника, удовлетворяющего заданным условиям.



**ЧИСЛА И ФИГУРЫ:
ПОЭТИЧЕСКИЙ
КАЛЕНДАРЬ.**

ЛИРИКА СЧЕТА

Если конкретности хочешь,
Математику не отвергай.
А лучше всего попытайся
Создать некий синтез;
ПОЭТИКОМАТЕМАТИКУ,
Так сказать, синтез
Земли и Неба.
Иначе — запомни это —
В поэтической мгле останешься.

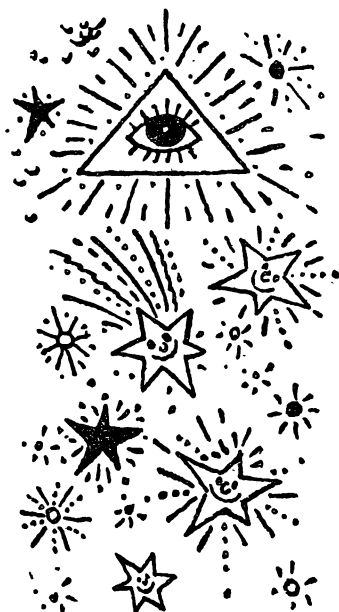
Э. Межелайтис

ДАРЫ ПРОМЕТЕЯ

Послушайте, что смертным сделал я...
Число им изобрел
И буквы научил соединять...

Эсхил («Прикованный Прометей»)

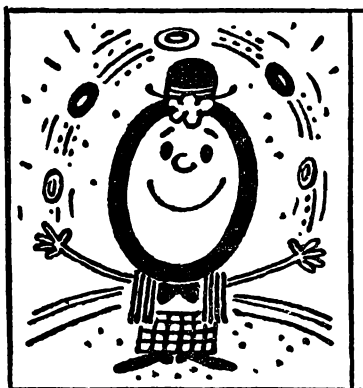




* * *

С маленькой капли росы начинается море,
Небо — с единственной дальней звезды.
Кто же сумеет все звезды на небе исчислить
Или все капли росы в морях сосчитать?
Истинное число их вовек не откроют —
Не народится такой человек на земле.
Истинное число их тому лишь известно,
Кто сотворил их. Но сам он об этом молчит.
Сам он, загадку задав, забрался за звезды
И притаился.

Э. Межелайтис

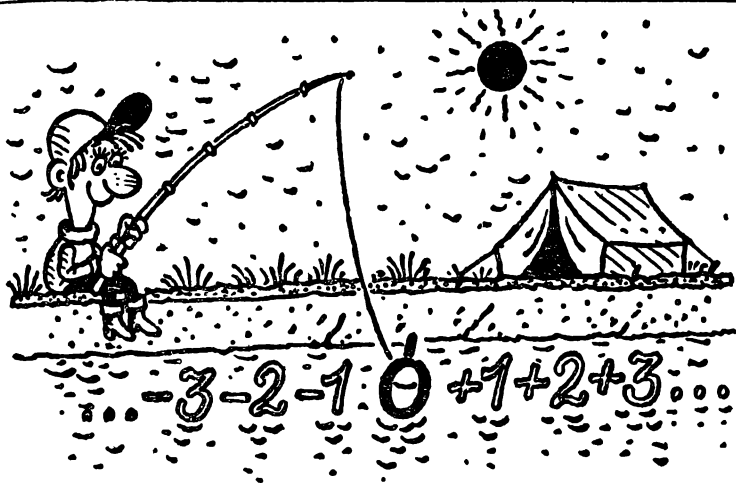


Цифра вроде буквы О,
Это — ноль, иль ничего.
Круглый ноль такой
хорошенький,
Но не значит ничегошеньки.

ТАБЛО

«Ноль градусов и ноль минут», —
Хоть и не часто, но бывает.
Ноли во тьме ночной пылают
И не погаснут, не мигнут.
«Ноль градусов», — горит табло —
И мне ни холодно, ни жарко.
Я от судьбы не жду подарка,
И мне сегодня повезло:
«Ноль — ноль минут». Салют ноллю!
Ноль дум. Ноль чувств. Легка поклажа.
Я лед. Я вечности родня.
Но через миг табло покажет
Минуту завтрашнего дня.

Л. Уханова



ИРОНИЧНОЕ

Положительные числа...
 Отрицательные числа...
 Между ними — одинок —
 Ноль — наивный поплавок.

В. Чубаров

НОЛЬ И ЕДИНИЦА

Вот это ноль иль ничего.
 Послушай сказку про него.

Сказал веселый, круглый ноль
 Соседке — единице:
 — С тобою рядышком позволь
 Стоять мне на странице!

Она окинула его
 Сердитым, гордым взглядом:
 — Ты, ноль, не стоишь ничего,
 Не стой со мною рядом!

Ответил ноль: — Я признаю,
Что ничего не стою,
Но можешь стать ты десятью,
Коль буду я с тобою.

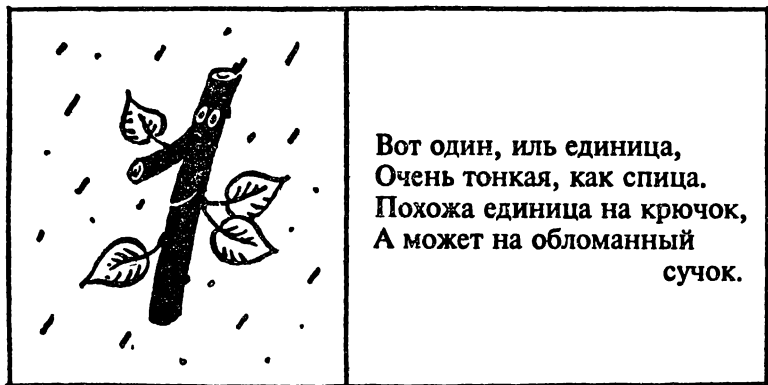
Так одинока ты сейчас,
Мала и худощава,
Но будешь больше в 10 раз,
Когда я встану справа.

Напрасно думают, что ноль
Играет маленькую роль.

Мы двойку в 20 превратим...
Из троек и четверок
Мы можем, если захотим,
Составить 30, 40.

Пусть говорят, что мы ничто, —
С двумя нолями вместе
Из единицы выйдет 100,
Из двойки — целых 200!

С. Маришак



«ОДИН»

Почти дожив до голубых седин
Я понял арифметике назло,
Что у людей простейшее «один»
Есть самое сложнейшее число.

И. Фонаков

И «ОДИН»

Извилист путь и долог,
Легко ли муравью
Сквозь тысячу иголок
Тащить одну свою.



Как оценка, — **ДВОЙКА** — символ краха. В противоположной значимости может быть даже символом сущности, например, как в древнеиндийском эпосе.

— Две пряхи, — учитель сказал вдохновенно, —
Закон и Творенье, Недвижность и Смена.
Прядут они дни, и прядут они ночи,
Вовек не становятся нити короче.

Из древнеиндийского эпоса

«ДВА»

Когда тебе невыносимо тяжело,
Попробуй сделать хорошо тому,
Кого гнетет беда твоей сильнее, —
И сразу полегчает на душе
Сначала у тебя, потом у человека,
Которому ты сделал хорошо.
А дальше все пойдет своим порядком:
На две улыбки посветлеет сумрак,
На два шага приблизится рассвет,
И две звезды над хмурым океаном
Появятся, и мореход упрямый
На этот раз от гибели уйдет.

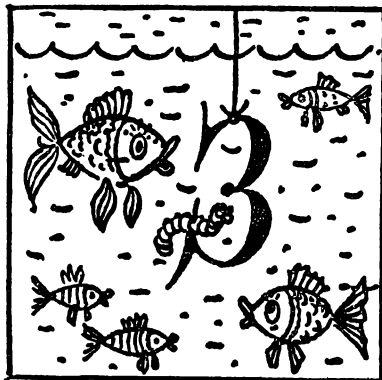
М.Дудин



И «ДВА»

У Бойки — снова двойка.
 Дневник домой несет.
 Вздыхает грустно Бойка:
 «Как маме не везет».

Перевод с болгарского



Тройка — третий
 из значков,
 Состоит из двух крючков.

«ТРИ» ЖИЗНИ

Я в сотый раз прикинул в тишине,
 Прodelал вновь нелегкую работу
 И вычислил: три жизни нужно мне,
 Как минимум. По Божескому счету.
 Одна — судите сами! — чтобы жить,
 Страдать, любить и верить, и дружить.
 Вторая — книжки умные читать,
 Ее мне точно будет не хватать.
 И третья жизнь — затем, чтоб сочинять
 Головоломки, ребусы, шарады,
 Статьи о математике писать —
 И лучше не было б отрады.
 Как минимум — три жизни. А дана
 Согласно мировому распорядку,
 Всего одна —
 И каждым нервом чувствуешь нехватку.

По мотивам стихов И. Фонякова

И «ТРИ» ВЕКА

Купила старушка
На рынке кукушку.
Зачем бы столетней
Старушке кукушка?

И тут мне старушка
Шепнула на ушко:
— Слыхала ТРИ ВЕКА
Живет эта птица.

Так хочется в этом
Самой убедиться.

«ТРИ»

Из воды все мы вышли. Она
И земля — величины предельные.
Наша кровь и морская волна
Одной плотности —

связь колыбельная.

И ничто никогда не изменится:
Так живем — колыбель и предел,
Пусть земля океанами пенится,
Лишь бы род наш людской

не редел...

Неспроста — океанская соль...

Пусть в крови, просоленные,
мечутся

Доброта,
Сострадание,
Боль —
аварийный запас человечества.

В. Кислов

* * *

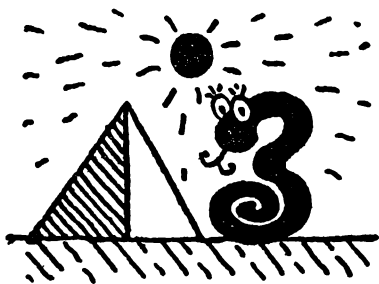
Мама глянула в дневник:
— Что же ты за ученик!
Хоть порадовал бы мать
И принес не «три», а «пять»!
— Что ты, мама! Много нас,
Ты подумай — целый класс.
Нам отличник каждый дорог,
Не хватает всем пятерок!

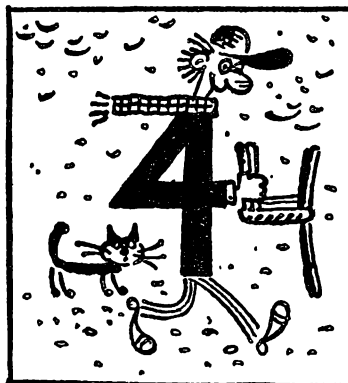
К. Тангрыкулиев
(С туркменского Я. Аким)

«ТРИ»

В допотопные лета
Мир держали три кита.
А потом они устали
И держать нас перестали
На натруженном хребте.
И в огромной пустоте
Держит мир с того мгновенья
Только сила вдохновенья.

А. Миллер





За тремя идет четыре,
Острый локоть оттопыря.
Смотри, четыре — это стул,
Который я перевернул.

«ЧЕТЫРЕ»

Когда-то в древнем мире
Не знал никто, никто,
Что дважды два — четыре,
А пятью двадцать — сто.

И «ЧЕТЫРЕ»

Четыре в комнате угла,
Четыре ножки у стола,
И по четыре ножки
У мышки и у кошки.
Бегут четыре колеса,
Резиною обуты.
Что мы пройдем за два часа,
Они — за две минуты.

С. Маршак



На бумаге цифра 5
Ручку вправо протянула,
Ножку круто изогнула.
Рады мы ее принять.

«ПЯТЬ»

Пять пальцев на руке одной,
И каждый чуточку иной,
Как в доме пятеро детей
Один исток, но пять путей,
Поранишь палец — он с рукой
Одною болью прочно слит.
Кто б из детей ни занемог —
Душа у мамочки болит.

А. Джачаев



Цифра шесть —
дверной замочек.
Сверху крюк,
внизу кружочек.

«ШЕСТЬ»

Есть у меня шестерка слуг,
Проворных, удалых,
И все, что вижу я вокруг, —
Все знаю я от них.

Они по знаку моему
Являются в нужде.
Зовут их: Как и Почему,
Кто, Что, Когда и Где?

Р. Киплинг



Вот семерка — кочерга,
У нее одна нога.
Семь — точно острая коса,
Коси, коса, пока роса.

«СЕМЬ»

Штрихи к портрету (Москвы)

Я — семь громоздящихся к небу холмов,
Я — семьдесят семь городских теремов,
Где скрыто бывшее от взоров нескромных,
Я — семь миллионов блестящих и темных
Стремящихся к некоей цели умов...

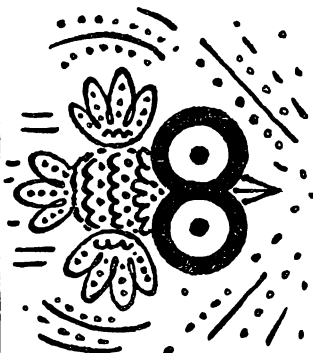
А. Мартынов

ЗАМОК СЕМИ ЩИТОВ

Жужжат веретена. И вот уж видны
Семь призрачных башен
Под светом луны.
Семь стен и семь рвов
И семь крепких ворот.
Из мглистого сумрака замок встает.

В. Скотт

У восьмерки два кольца
Без начала и конца.
Цифра 8 так вкусна:
Из двух бубликов она.



СЕМЬ И ВОСЕМЬ

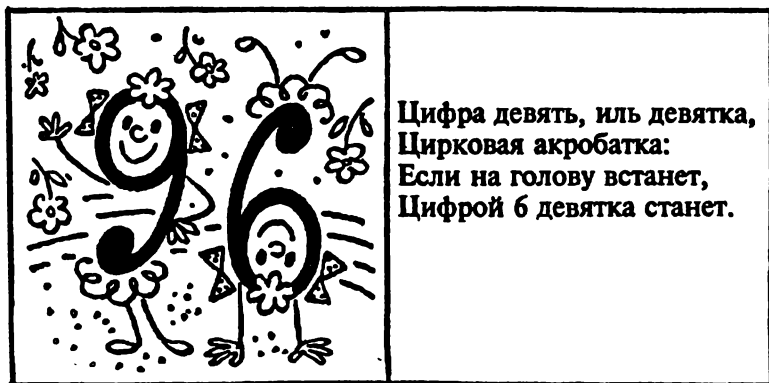
Жалоба

На днях отправил семь стихов про осень,
А из редакции мне возвратили восемь.

ВОСЕМЬ

Гармошку друг растягивал,
А я ему подтягивал.
А было нам в ту осень
Каждому по ВОСЕМЬ.

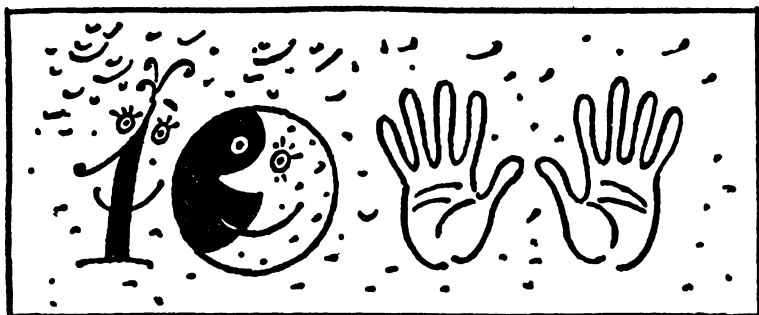
А. Куницын



ДЕВЯТЫЙ КРУГ

В жизни, что-то от бега
На ДЕВЯТОМ кругу.
Круг десятый — победа.
А пока — я бегу...
Обгоняя разлуку,
Догоняя печаль,
По ДЕВЯТОМУ кругу
Я бегу в эту даль.
И с апломбом аскета
Я себе говорю:
Принцип выше успеха!
Добегу. Догорю.

А. Поперечный



10 ЛУННЫХ МЕСЯЦЕВ (280 ДНЕЙ)

«Год завершался тогда десятой луны исполнением.
 Это и было число в высшей у древних чести.
 В знак ли перстов десяти, привычного счета порядка,
 Или, что женских родов месяц десятый пора,
 Иль, что в счисленьи дойдя, возрастая, до цифры десятой,
 Снова мы начинать счет с единицы должны».

Овидий. Фасты, III, 121.

ДЕСЯТЬ МУДРЕЦОВ (ЮМОРЕСКА)

Однажды десять мудрецов решили пообедать,
 Один так жадно ел свой суп, что их осталось девять.
 Уснули девять мудрецов. Шел дождь. Стояла осень.
 Один из них так долго спал, что их осталось восемь.
 В гостях один из восьмерых остался насовсем.
 Пересчитайте мудрецов — теперь их стало семь.
 Семь мудрецов стояли в ряд. Один решил присесть.
 Колодец принял он за стул, и вот их стало шесть.
 Шесть мудрецов взялись подряд все доски обстрогать.
 Один улегся на верстак, и вот их стало пять.
 Пять мудрецов, как говорят, стреляли в лучшем тире.
 Один на цель навел приклад, и стало их четыре.
 Четверка дружных мудрецов отправилась на море.

Они нырнули вчетвером, а вынырнули — трое.
Один из трех решил зайти проведать в клетке льва.
Но все же из троих в живых осталось целых два.
Два мудреца брели в лесу средь сосен и осин.
Один за дерево зашел. Домой пришел один.
Себе такую он жену нашел в конце концов,
Что больше нет ни одного из дружных мудрецов.

Вл. Луговой

СКОЛЬКО РАЗ ПОВТОРЯЕТСЯ 100?



У простого сторожа непросторный дом:
Часто в нем стоножка бродит под столом.
Дорожит стоножка чистотою ног
И столичной ваксой чистит сто сапог.
Вместо двух непросто вычистить все сто,
Сразу столько обуви не носил никто.
У простой стоножки стоит постоять
И у той стоножки опыт перенять.

Ответ: «100» повторяется 19 раз (убедитесь!).

ОТСЧЕТ КАЛЕНДАРЯ

Зрили в черных котах,
В бородатых козлах
Сатану.
И не ведали:
Минет 400 лет —
Рафаэль
Нарисует Мадонну,
Минет 1000 лет —
И земляне взойдут
На луну.

А. Куницын

НЕОБЫКНОВЕННАЯ ДЕВОЧКА

Ей было тысяча сто лет,
Она в сто первый класс ходила,
В портфеле по сто книг носила —
Все это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно...
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.



А. Стариков (Из журнала «Квант»)

Действительно, — впечатляющий портрет девочки!
Виной тому, что «десять темно-синих глаз» — двоичная
система счета: $(10)_2 = 2$, и паре красивых глазок
 $(1100)_2 = 12$ лет.

* * *

Ночь смотрит ТЫСЯЧАМИ глаз,
А день глядит ОДНИМ;
Но солнца нет — и по земле
Тьма стелется, как дым.

Ум смотрит ТЫСЯЧАМИ глаз,
Любовь глядит ОДНИМ;
Но нет любви — и гаснет жизнь,
И дни плывут, как дым.

Я. Полонский

ПОЭТИКОАРИФМЕТИКА

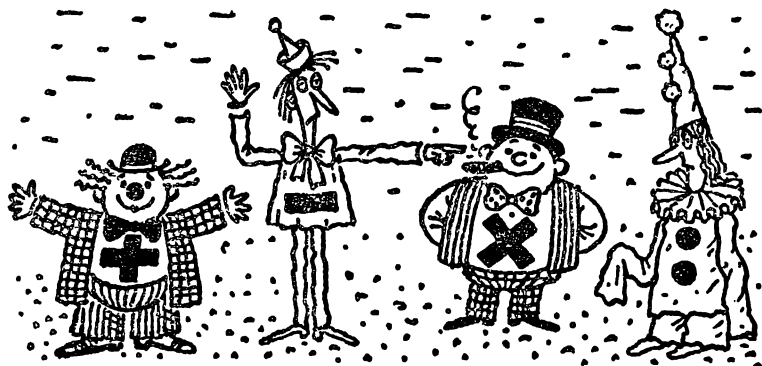
ЧЕТЫРЕ ДЕЙСТВИЯ

(Отрывок)

Мне пришлось побродить, но на редкости ты не надейся.
Спотыкался не раз я, ухабист был путь мой земной.
По земле я ходил, и *четыре обычные действия*
Из простой арифметики шли по дороге со мной.
Жизнь удар наносила — *суммировал* эти удары,
Где удар был прямой, хоть и сделанный наверняка.
Только подлый удар я считал незаслуженной карой.
Отнимает уверенность бьющая в спину рука.
Были случаи — враг, невниманьем меня унижая,
Проходил, не заметив моих накопившихся сил.
Он держался беспечно, лишь шансы мои *умножая*,
Но ему вероломно удара я не наносил.
Жизнь моя и торжеств, мной заслуженных, часто лишала,
На случайных *делила* людей, мои занимавших места.
Но, быть может, она мне собою лишь стать не мешала
И до срока при встрече свои замыкала уста.
Я тогда по ухабам стопы свои дальше направил,
Не пугаясь дороги и веря нелегкой судьбе,
По нехитрому принципу арифметических правил
Все четыре их действия я испытал на себе.

А. Кюрчайлы

(С азербайджанского В. Проталин)



ОДИН ПЛЮС ОДИН

С единицей сложишь единицу —
Два крыла поднимут в небо птицу.
Две руки простерты для объятья —
Ты и я обнимемся как братья!
Вот и стало нас на свете двое,
Стали вдвое мы сильнее с тобою.
... Чтоб от одиночества избавить,
Надо к одному один прибавить.

М. Алимбаев (с казахского)

ХАРАКТЕР

В нем есть черты воителя и труса,
Приметы правдолюбца и враля.
Равны числом и минусы и плюсы,
Однако в сумме не дают нуля!

И. Фоняков

РАЗМЫШЛЕНИЯ

Чем больше учишь, тем больше знаешь,
А больше знаешь, больше забываешь.
Чем больше забываешь — меньше знаешь,
А меньше знаешь — меньше забываешь,
Но меньше забываешь — больше знаешь!
Так для чего ж учиться?

*Из английского фольклора
(Пер. доктора физико-
математических наук
В. Левина)*



1

Вы слышали? Говорят:
Весна поменяла наряд!
И этому рад скворец
(«досвистал до седин»)

Плюс дремлющая сова — один.
Плюс чибис («ты слезы утри!») — два.
Плюс дрозд, самый грозный в мире — три.
Плюс кочет («не хочет спать!») — четыре.
Плюс аист («лягушки есть?») — пять.
Плюс гусь («всех гусениц съем!») — шесть.
Плюс ласточка («милости просим!») — семь.
Плюс лебедь на болотной воде — восемь.
И т.д. И т.д. И т.д.
Велика, необъятна, безумна
С криком по небу движется сумма.

2

Летнее солнце вспыхнет как блиц —
Начинается умножение птиц:
Скворец × на скворца —
И скворчатам нету конца...

Сова × на сову —
Совята посыпались на траву.
Чибис × на чибиса —
И кричат, рыдают в ночи леса.
Дрозд × на дрозда —
И дроздят полна борозда.
Кочет × на кочета —
И чего это аист хохочет, а?
Аист × на аиста —
Аистята в небе купаются.
Гусь × на гуся —
Без арифмометра не обойдуся.
Ласточка × на ласточку —
Каждому сыну по белому галсточку!
Лебедь × на лебедя —
Сколько брызг, белизны и лепета.
И получается произведение —
Всеобщее радостное смятение.

3

Все яснее осенние мелочи тайные —
Везде начинается вычитание:
Минус один — скворца небесам
Отдадим.
Минус два — и в дупло схоронилась
Сова.
Минус три — лети чибисенок,
Пари!
Минус четыре — и дрозд на новой
Квартире.
Минус пять — кочет навеки отправится
Спать.
Минус шесть — аист шлет прощальную
Весть.

Минус семь — гусь посылает приветик
Всем.

Минус восемь — и ласточку испугала
Осень.

Минус лебедь (его бы приклеить
К заледеневшей воде!)

И т.д., и т.д., и т.д.

Жизнь была и пестра и густа —

Остался лишь ваку-у-у-ум:

Пус-
То-
Та!



СКОЛЬКО БУДЕТ ДВАЖДЫ ДВА? (Отрывок из пародии А. Иванова)

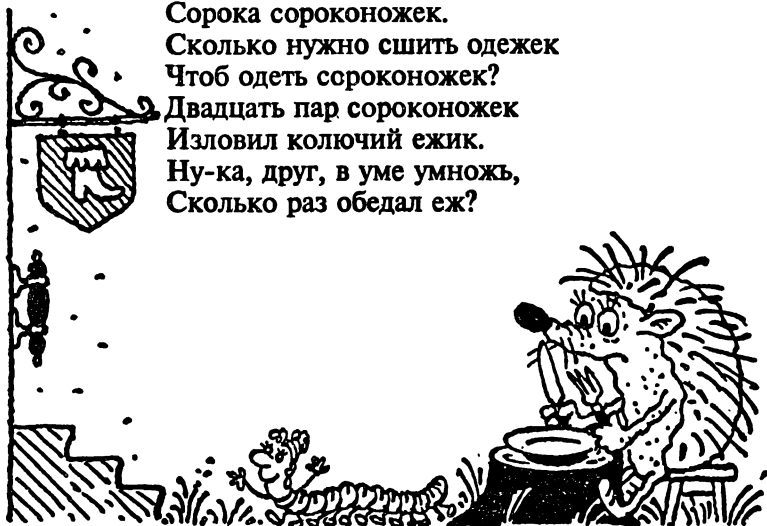
...Дважды два не всегда
в нашей жизни четыре,
А порою и пять. А бывает и сто.

А. Кукулин

...И с тех пор я поэт. Сочиняю прилично,
Издаюсь, исполняюсь, хоть в мэтры бери...
Я, конечно, шутил, ибо знаю отлично:
Дважды два, как известно и школьнику, — три!

ЗАГАДКА

Сорок ног сороконожки
Побежали по дорожке.
Сколько надобно сапог
Сшить для этих быстрых ног?
Роют норки сорок ножек
Сорока сороконожек.
Сколько нужно сшить одежек
Чтоб одеть сороконожек?
Двадцать пар сороконожек
Изловил колючий ежик.
Ну-ка, друг, в уме умножь,
Сколько раз обедал еж?



МИЛЛИОН

Шел по улице отряд —
сорок мальчиков подряд:

раз,
два,
три,
четыре,
и четыре
на четыре,

и четырежды
четыре,
и еще потом четыре.

В переулке шел отряд —
сорок девочек подряд:

раз, два, три, четыре,
и четыре на четыре,
и четырежды четыре,
и еще подряд четыре.

Да как встретились вдруг,
стало восемьдесят вдруг.

Раз,
два,
три,
четыре,
и четыре
на четыре,
на четырнадцать
четыре,
и еще потом четыре.

А на площадь повернули,
а на площади стоит
не компания,
не рота,
не толпа,
не батальон,
и не сорок,
и не сотня,
а почти что

миллион!

раз, два, три, четыре,
и четыре
на четыре,
сто четыре
на четыре,
полтора
на четыре,
двести тысяч
на четыре,
и еще потом четыре!

Все!

Д. Хармс

УМНОЖЕНИЕ (ШУТКА)

Жили в речке пескари:
Дважды два и трижды три.

А еще жила плотва:
Трижды три и дважды два.

Но — единожды одна —
Щука поднялась со дна:

И дрожит от уважения
Вся таблица умножения.

Ал. Кондратьев

ЧАРЫ ЛИНИЙ И ФИГУР

Могущественна геометрия;
в соединении с искусством —
неодолима.

Евритид

ТОЧКА

Наверное, я — плод
Случайного романа
Двух линий.
Я одинока в мире.

Вот говорят: он вышел
Из такой-то точки,
И еще: дошел до точки.
Что это значит? Я не знаю.

...А вдруг
Меня сотрут?

С французского

ТОЧКА

Я — невидимка! В том вся суть моя —
В воображении дана лишь я!
Представишь ты себе меня — я вот!
И без меня ничто здесь не пройдет.
В фигурах всех могу я воплотиться,
И все, что есть, все для меня граница.

С немецкого

* * *

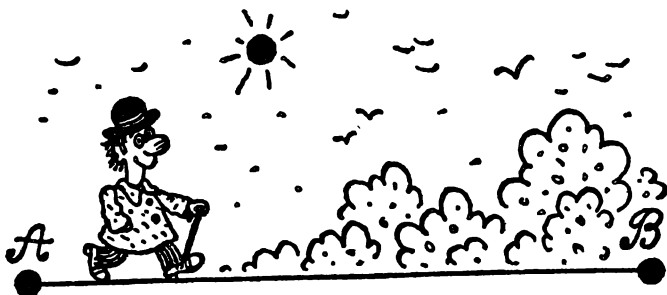
Ну, как метро? Молчи, в себе тай.
Не спрашивай, как набухают почки...

А вы, часов кремлевские бои —
Язык пространства, сжатого до точки.
О. Мандельштам

ПРЯМАЯ

Прямая линия! Я чту
Характер твой бескомпромиссный,
Тобой я измеряю мыслей
И глубину, и чистоту.
Полет межзвездных кораблей,
Круженье птиц, порывы ветра,
Изгибы рек среди полей
Упрямо выпрямляю в метры.
Среди парабол и спиралей,
Которыми опутан мир,
Тебя, прямую, выбираю
За основной ориентир.

Н. Альтовская



ПАРАЛЛЕЛИ

Идешь, а пространство бескрайне,
Рядом с нею идешь,
И очень хочется поболтать.

Но все, что ты скажешь,
Знает она заранее,

Потому что с древнейших,
С незапамятных самых времен
Идете вы рядом.

А в мечтах
Вы встречаетесь с ней,
Пересекаетесь
И сливаетесь.

Параллелос (*греч.*) — идущие рядом.

С французского

* * *

У тебя свой мир, свой дом,
С книгами, детьми, гостями.
В жизни мы с тобой идем
Параллельными путями.

Продолжаем — каждый — путь:
Правильный, прямой и честный.
Встретимся когданибудь,
Обещает Лобачевский.

И. Фоняков

Взлетает птица,
Вверх ползет опара,
В бокале светлом закипает пена
И нарастает страсть...
Дом и гора,
Огонь костра,
Уверенность, надежда, вера в завтра,

Все — снизу вверх.

Вектор (*лат.*) — несущий, указывающий направление.

Д. Шайнер
(С чешского В. Солоухин)

ЛОБАЧЕВСКИЙ (отрывок)

О чем он думал во вчерашнем?
О звездном облаке, летящем
Из ниоткуда — в никуда?
О том что станет новым взглядом:
Две трассы, длящиеся рядом,
Не параллельны никогда?

Что постоянному движенью
Миров
Сопутствует сближенье,
И, значит, встретятся они:
Его земная, с неземными
Непараллельными прямыми

Когда-нибудь,
Не в наши дни?...

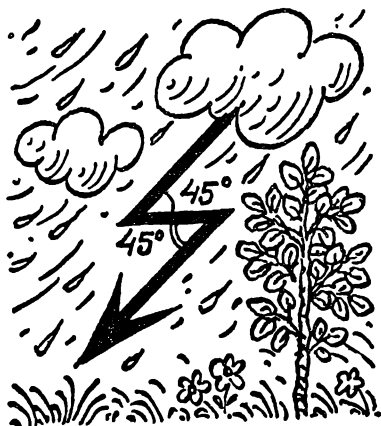
А. Лихолет



Дождь редкий, точный, вертикальный,
Как будто в небе есть отвес,
И старый мастер в час прощальный
Сливает капельки с небес.
Земле он перпендикулярен

И растекается не вдруг,
Описывая на бульваре
Почти что совершенный круг.
И в каждом жесте, в каждой точке
Вплоть до кленового листа
Геометрическая точность
Или Евклида простота.

В. Шаламов



УГОЛ (Отрывок)

В просторах накаленной полумглы
Ловлю мгновенной молнии углы.
Когда бы линией хотел воспеть я
Идущее двадцатое столетье,
Я начертал бы молнии зигзаг.

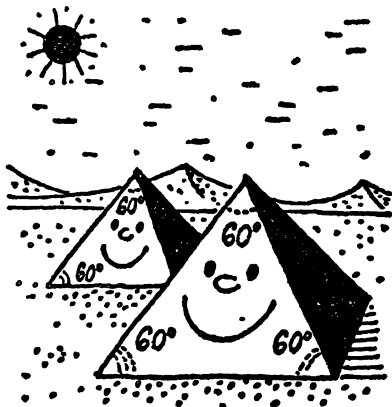
Э. Межелайтис

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Я слишком далеко зашел
В любви к порядку.

Увы, мне больше
не о чем мечтать.

С французского



Боже, спаси от щедрости! —
трижды вздохнул треугольник,
награжденный
четвертым углом.

В. Каралюс

КВАДРАТ

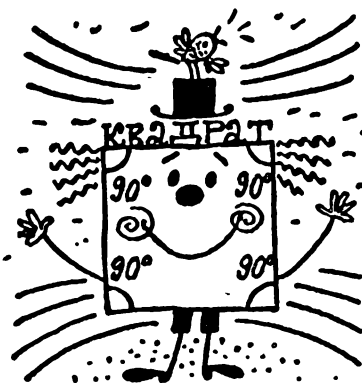
Любая из твоих сторон,
На трех соседок глядя,
Себя в них видит и собой любит.

Но кто же с кем подружится из них?
Те, что пересекаются?
Иль те, что параллельны?

А тут еще углы,
И в них сердито тычется пространство,
А у тебя своих забот
Хватает...

С французского

* * *

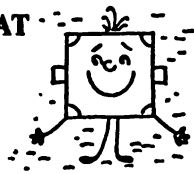


Присмотритесь-ка к квадрату:
Он здоровый, тароватый,
Он надежнее как друг,
Чем уж слишком круглый круг.
В нем четыре стороны
И все стороны равны.
Честен каждую чертой,
Каждый угол в нем прямой.
Тем еще квадрат отличен,
Что вполне он симметричен,
Треугольников всех рать
Вам того не может дать.

С немецкого



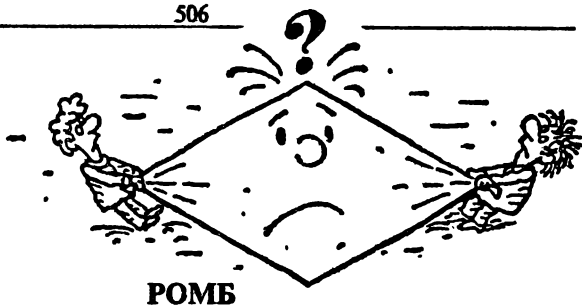
ТРЕУГОЛЬНИК И КВАДРАТ



Жили-были два брата:
Треугольник с Квадратом.
Старший — квадратный,
Добродушный, приятный,
Младший — треугольный,
Вечно недовольный.
Стал расспрашивать Квадрат:
«Почему ты злишься, брат?»
Тот кричит ему: «Смотри,
Ты полней меня и шире.
У меня углов лишь три,
У тебя же их четыре.»
Но Квадрат ответил: «Брат!
Я же старше, я — квадрат».
И сказал еще нежней:
«Неизвестно, кто нужней!»
Но настала ночь, и к брату,
Натыкаясь на столы,
Младший лезет воровато
Срезать старшему углы.
Уходя сказал: «Приятных
Я тебе желаю снов!
Спать ложился — был квадратным,
А проснешься без углов!»
Но наутро младший брат
Страшной мести был не рад.
Поглядел он — нет квадрата.
Онемел... Стоял без слов...
Вот так месть! Теперь у брата
Восемь новеньких углов!



Е. Паин

**РОМБ**

Квадрат обмяк,
Устал,
Дал за углы себя схватить
И ромбом стал.
И загрустил:
А вдруг он промахнулся,
А вдруг бы жизнь другим путем пошла,
Подставь он
Два других угла?

С французского

**ГРАНТА
(Отрывок)**

Свечей гоня ночную мглу,
Он чертит ромбы и трапеции,
Отстукивает по столу
Трохей и дактиль Древней Греции.
Он чуть живой: не ест, не пьет,
Почти не спит. Зато отныне
Он важно диспуты ведет,
Хоть и на варварской латыни.
Он всех историков забыл,
Он изменил созданьям музыки,
Чтоб одолеть сложенье сил
Или квадрат гипотенузы.

Дж. Байрон

* * *

Что есть душа — куб? ромб? или парабола?
Квадрат иль круг? Вот этот или тот?
Напоминает грушу? или яблоко?
(Вдруг на Луну, сорвавшись, упадет?)

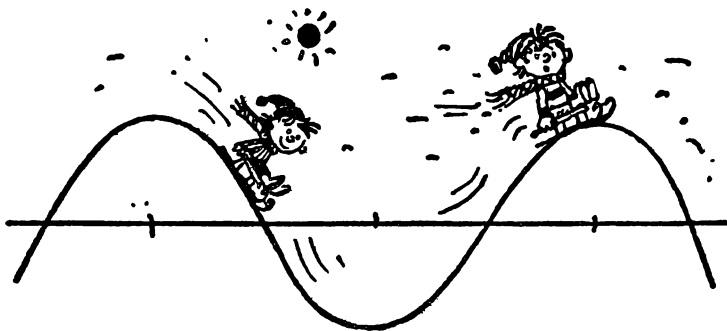
.....

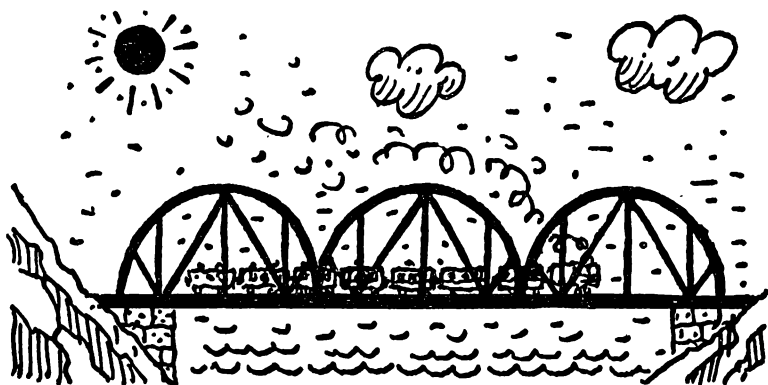
В мое рентгеновское Ars poetica
Не видно (как захлопнулось окно)
Ни куба, ни овала — арифметика
Симметрию нарушила давно.

Э. Межелайтис

СИНУСОИДА

Ах, как томительны вечные спуски,
Как утомительны вечные взлеты!..
В каждой ложбине, на каждой вершине —
Тщетной надеждой — мечта о привале,
Об остановке, о передышке.

С французского



ЦИКЛОИДА

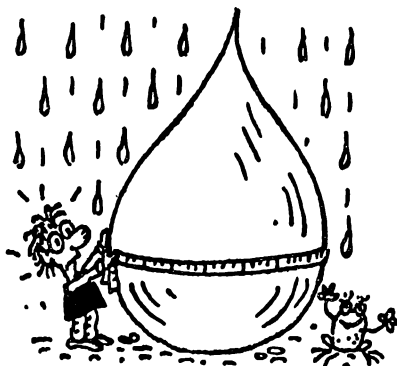
Интересно, какие песни
Синусоида бы запела,

Доведись ей вот так же
Камнем лететь с обрыва

И, едва опомнившись от удара,
Снова карабкаться по крутому склону...

С французского

ЕСЛИ (Отрывок)



Если взять дождя все капли
И соединить в одну,
А потом у этой капли
Ниткой смерить толщину, —
Будет каплища такая,
Что не снилась никому...
И не приснится никогда
В таком количестве вода.

С. Михалков

Чья рука этот круг роковой разорвет?
Кто конец и начало у круга найдет?

Омар Хайям

ДОРОГА В ГОРУ (Отрывок)

Круг за кругом — потери мои,
Круг за кругом — мои постиженья,
Зов усталости, жажда движенья.
Друг за другом идущие дни.

.....

Помни прошлое, думай о новом
Возвратившись на круги свои.

О. Дмитриев

РУБАИ О ДРЕВНЕМ САМАРКАНДЕ

Нет, жизнь не круг, замкнувшийся в себе.
Путь к счастью есть у каждого в судьбе.
Талант и воля, два чудесных средства,
его помогут отыскать тебе.

А. Лукина

ГЕОМЕТРИЯ УДАЧ

У каждого из нас своя прямая,
Им пересечься только раз дано.
И в их пересечении мы встречаем
Свою беду, судьбу, удачу, но...

У каждого из нас своя окружность,
Непроходящий круг проблем, забот,
Потерянность, утраченность, ненужность,
И новый к потепленью поворот.

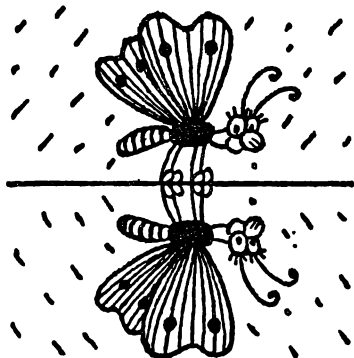
У каждого из нас свой треугольник.
И убегая от страстей своих,
Мы мечемся, настигнутые болью
И счастьем, поделенным на троих.

А как нас век кидает и ломает!
Но на губах так мало добрых слов.
У каждого из нас своя кривая
И ломаная с множеством углов.

Д. Чельшев

ОТРАЖЕНИЕ — ВИД СИММЕТРИИ

На зеркальной поверхности
Сидит мотылек.
От познания истины
Бесконечно далек,
Потому-то, наверное,
И не ведает он,
Что в поверхности зеркала
Сам отражен.



Л. Мартынов

* * *

Трехмерный мир Евклида страшно прост
И просто страшен. Есть четырехмерный.
В нем правит Время, отданное в рост.
Двадцатый век — его союзник верный.
Ему не Ньютон, а Эйнштейн сродни!
Встань! Нашу песню с ними затяни!

(В последней фразе поэт обращается к Музе)

П. Антокольский

УСТУПКА (ироничное)

Для тех, которым все от века ясно,
Недоуменья наши — праздный бред.
Двумерен мир, — твердят они в ответ, —
А думать иначе небезопасно.

Ведь, если мы допустим на минуту,
Что за поверхностью сияют бездны,
Возможно ли будет доверять уюту,
И будут ли укрытья нам полезны?

А потому для пресечения трений
Откажемся от лишних измерений!

Коль скоро менторы судили честно,
И все, что ждет нас, наперед известно,
То третье измеренье неуместно.

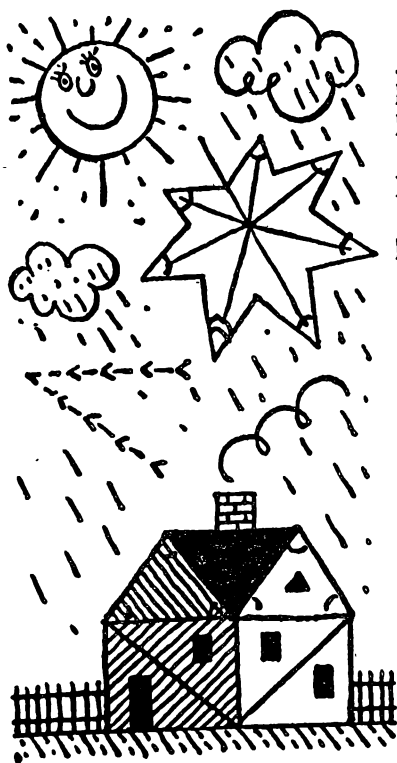
Г. Гессе

ГЕОМЕТРИЯ ОСЕНИ (Отрывок)

Где геометрический властвует лад, —
Там строгая царствует мысль.
Здесь линия, и треугольник, и круг
Искусные игры ведут, —
Я, глядя на них, не тревожусь ничуть
За доброго лета судьбу.
Мне слышно, как бьется за дальней чертой
Горячее сердце его.

Э. Межелайтис

* * *



... Я по инерции катился
Почти евклидовой прямой,
Но вдруг твой образ мне
явился,
И путь мой в эллипс
искривился,
И ты в нем —
фокус золотой.

Г. Николаев, физик

Книга мастера отечественной
научно-популярной литературы
Бориса Анастасьевича Кордемского —
сборник математических миниатюр:
разнообразных занимательных эссе
и сказочек, фантазий
и просто задач.

**Все, кто увлекается математикой, —
независимо от возраста —
получат возможность
потренировать мышление,
находчивость
и изобретательность.**

